Grafy i Zastosowania

12: Przepływy w sieciach

©Marcin Sydow

Spis zagadnień

- sieci przepływowe
- przepływy w sieciach
- ścieżka powiększająca
- tw. Forda-Fulkersona
- Znajdowanie maksymalnego przepływu
- Zastosowania przepływów

Sieci przepływowe

Sieć przepływowa ze **źródłem** s i **ujściem** t to graf skierowany $G = (V, E)$ z wymiernymi, nieujemnymi wagami na krawędziach danymi przez funkcję $c : E \leftarrow Q^+$, przy czym $indeg(s) = 0$ i $outdeg(t) = 0$. Wagę $c(e)$ krawędzi $e \in E$ nazywamy **przepustowością krawędzi**.

przykład

Uwaga: zagadnienie dla sieci z wieloma źródłami/ujściami można zredukować do zagadnienia z jednym źródłem i jednym ujściem poprzez naturalne dodanie *superźródła* i *superujścia*.

przykład

Czasami rozpatruje się też sieci przepływowe z **przepustowością wierzchołków**. Takie zagadnienie również można łatwo zredukować do zwykłych sieci przepływowych (poprzez zastąpienie każdego wierzchołka parą wierzchołków połączonych jedną krawędzią o odpowiedniej przepustowości).

Przepływ w sieci

Przepływ w sieci G z funkcją przepustowości c to taka funkcja $f : E \leftarrow Q^+ \cup \{0\}$, która spełnia warunki:

- $f(e) \leq c(e)$ dla każdej krawędzi $e \in E$ (nieprzekraczalność przepustowości)
- dla każdego wierzchołka poza s i t zachodzi: $\sum_{u \in In(v)} f((u,v)) = \sum_{u \in Out(v)} f((v,u))$ (prawo zachowania przepływu w węzłach)

(przez $In(v)$ oznaczamy zbiór wierzchołków będących początkami krawędzi, których końcem jest v. $Out(v)$ definiujemy analogicznie)

Krawędź e, dla której $f(e) = c(e)$ nazywamy **nasyconą**.
przykład

Maksymalny przepływ

Wartością przepływu f, oznaczaną jako $|f|$, nazywamy sumę wartości przepływu na wszystkich krawędziach mających źródło jako początek (lub mających ujście jako koniec, co daje tę samą liczbę)

przykład

Przepływ maksymalny dla danej sieci do dowolny przepływ mający maksymalną możliwą wartość.

przykład

Zagadnienie znajdowania maksymalnego przepływu w sieci ma wiele istotnych zastosowań.

Przekrój sieci

Przekrojem sieci nazywamy rozcięcie w grafie reprezentującym sieć, które oddziela źródło od ujścia.

przykład

Przepustowością przekroju nazywamy sumę przepustowości wszystkich krawędzi skierowanych od składowej zawierającej źródło do składowej zawierającej ujście.

przykład

Słaba dualność i certyfikat dla przepływów

Zachodzą następujące zależności:

- wartość przepływu nie może być wyższa niż przepustowość jakiegokolwiek przekroju (słaba dualność)
- jeśli znajdziemy taki przepływ f i taki przekrój, że wartość przepływu równa jest przepustowości tego przekroju, to mamy pewność, że przepływ jest maksymalny (certyfikat optymalności)

przykład

Twierdzenie Forda-Fulkersona (silna dualność)

Twierdzenie (Ford-Fulkerson, 1955):
Wartość maksymalnego przepływu w każdej sieci zawsze równa jest minimalnej wartości przekroju w tej sieci.

przykład

Powyższe minimaksowe twierdzenie daje elegancką charakteryzację przepływu maksymalnego, ale nie musi być najwygodniejszą metodą algorytmicznego znajdowania maksymalnego przepływu.

Większość znanych algorytmów dla tego zadania opartych jest na pomocniczym pojęciu *ścieżki powiększającej przepływ*.

Ścieżka powiększająca przepływ

Ścieżka powiększająca dany przepływ f to taka ścieżka nieskierowana (tzn. krawędzie mogą być skierowane dowolnie) i prosta od źródła do ujścia, że zachodzą następujące warunki:

- każda krawędź e skierowana od źródła do ujścia jest *nienasycona*
- dla każdej krawędzi ścieżki e skierowanej przeciwnie (od ujścia do źródła) $f(e) > 0$.

Interpretacja: w takim wypadku na każdej krawędzi e pierwszego typu można potencjalnie powiększyć przepływ o wartość $c(e) - f(e)$, a na pozostałych można potencjalnie zmniejszyć "cofanie" przepływu o wartość $f(e)$. Cały przepływ można więc powiększyć o minimum z tych wartości na całej ścieżce.

przykład

Algorytm znajdowania maksymalnego przepływu

Twierdzenie:
Przepływ w danej sieci jest maksymalny $\Leftrightarrow$ nie istnieje żadna ścieżka powiększająca ten przepływ.

(dowód wynika z własności pojęcia ścieżki powiększającej)

Idea algorytmu: rozpoczyna od przepływu zerowego i następnie w każdej iteracji znajduje pewną ścieżkę powiększającą przepływ. Algorytm kończy działanie gdy nie istnieje już żadna ścieżka powiększająca.

Uwaga: złożoność czasowa znalezienia ścieżki powiększającej wynosi $O(E)$

Naiwna implementacja algorytmu

Efektywność powyższego algorytmu zależy od efektywności znajdowania kolejnych ścieżek powiększających.

Zauważmy, że gdy przepustowości wszystkich krawędzi są liczbami całkowitymi, to każda ścieżka powiększająca powiększy przepływ o conajmniej 1.

Można pokazać, że przy naiwnej implementacji (tzn. gdy algorytm znajduje jakąkolwiek ścieżkę powiększającą w każdej iteracji) w pesymistycznym przypadku trzeba wykonać aż tyle iteracji, ile wynosi maksymalny przepływ, nawet dla małych grafów (niekoniecznie zależy to od rozmiaru grafu, ale od przepustowośći krawędzi!).

przykład
Złożoność takiego algorytmu jest więc $O(m|f^*|)$, gdzie f^* to maksymalny przepływ, $m = |E|$.

Problemy z naiwną implementacją

Co więcej, gdy przepustowości mogą być liczbami niewymiernymi, powyższy algorytm może w istocie *nigdy się nie zatrzymać* (począwszy od pewnej iteracji będziemy powiększali przepływ o coraz mniejszy ułamek)

Algorytm Edmonda-Karp'a

Aby zaradzić temu problemowi można znajdować kolejne ścieżki powiększające używając algorytmu BFS, tzn w każdej iteracji starać się znaleźć *najkrótszą* ścieżkę powiększającą od źródła do ujścia.

Algorytm taki ma złożoność $O(n \cdot m^2)$.

Ulepszone algorytymy maksymalnego przepływu

Istnieją bardziej skomplikowane algorytmy znajdujące maksymalny przepływ.

Niektóre z nich oparte są na pojęciu tzw *przed-przepływu* (ang. *pre-flow*) i dopuszczają nieco rozluźnione warunki poprawności w trakcie poszukiwania maksymalnego przepływu, tzn wierzchołki sieci mogą chwilowo *gromadzić nadmiar* przepływu. Na końcu jednak działania tego typu algorytmów znaleziony maksymalny przepływ spełnia klasyczną definicję podaną wcześniej.

Taka implementacja (dużo bardziej skomplikowana) może dać złożoność $O(n^2m)$, a więc znacznie lepiej niż poprzednio.

Istnieje nawet jeszcze bardziej dopracowana implementacja algorytmu o złożoności $O(n^3)$.

Przepływy a skojarzenia maksymalne

Można zauważyć, że zagadnienie skojarzenia maksymalnego w grafie dwudzielnym $G = (V_1 \cup V_2, E)$ można **zredukować** do zagadnienia przepływu maksymalnego w pewnym grafie.

Konstrukcja jest następująca:

- dodajemy 2 wierzchołki: źródło i ujście. Źródło łączymy krawędziami skierowanymi do wszystkich wierzchołków z V_1 a ujście krawędziami skierowanymi od wszystkich wierzchołków z V_2.
- wszystkim krawędziom oryginalnego (nieskierowanego) grafu nadajemy skierowanie od V_1 do V_2
- nadajemy wszystkim krawędziom przepustowość 1

Wtedy krawędzie użyte w maksymalnym przepływie w takim zmodyfikowanym grafie wyznaczają maksymalne skojarzenie w oryginalnym grafie.

Podsumowanie

- Sieci przepływowe
- przepływy
- ścieżki powiększające
- Tw. Forda-Fulkersona
- Znajdowanie maksymalnego przepływu
- Zastosowania przepływów

Przykładowe ćwiczenia

- znajdź ścieżkę powiększającą w podanej sieci z przepływem
- znajdź przepływ maksymalny w podanej sieci

Dziękuję za uwagę