Grafy i Zastosowania

7: Planarność

©Marcin Sydow

Spis zagadnień

- Planarność
- Twierdzenie Kuratowskiego
- Własności planarności
- Twierdzenie Eulera
- Grafy na innych powierzchniach
- Pojęcie dualności geometrycznej i abstrakcyjnej

Graf Planarny

Graf planarny to taki graf, który można narysować na płaszczyźnie bez przecięć krawędzi.

Rysunek taki nazywamy **rysunkiem płaskim** (lub **grafem płaskim**)

Uwaga: graf planarny może być narysowany w sposób, który niekoniecznie jest grafem płaskim

przykład

Uwaga: dowolny graf planarny prosty można narysować tak, że wszystkie krawędzie są odcinkami prostymi.

Zastosowania pojęcia planarności

Przykładowe zastosowania pojęcia planarności:

- Projektowanie bezkolizyjnych dróg, linii kolejowych, skrzyżowań, etc. przy najmniejszej możliwej liczbie mostów, wiaduktów, etc.
- Projektowanie układów elektronicznych i sposobów ich wykonania
- Algorytmy automatycznej wizualizacji (rysowania) grafów

Grafy Kuratowskiego

Twierdzenie:

Grafy K_5 i $K_{3,3}$ nie są planarne (tzw. **grafy Kuratowskiego**) (dowód polega na bezpośrednim sprawdzeniu wszystkich możliwosci narysowania)

Proste obserwacje:

- każdy podgraf grafu planarnego jest planarny
- graf zawierający jako podgraf graf nieplanarny sam jest nieplanarny

Wniosek: Jeśli graf zawiera graf Kuratowskiego jako podgraf to jest nieplanarny.
(warunek wystarczający nieplanarności)

Homeomorfizm

Dwa grafy są **homeomorficzne** $\Leftrightarrow$ oba można uzyskać z pewnego grafu poprzez wstawianie wierzchołków stopnia 2 wewnątrz ich krawędzi.

przykład

Uwaga: homeomorfizm pomiędzy grafami jest relacją równoważności. Interpretacja grafów wzajemnie homeomorficznych jest taka, że są podobne topologicznie

Uwaga: homeomorfizm pochodzi z topologii (dziedzina matematyki) i oznacza wzajemnie jednoznaczną funkcję pomiędzy dwoma *rozmaitościami* taką, która jest ciągła i jej odwrotność też jest ciągła (czyli nie "rozrywa" ani nie "skleja")

przykład

Twierdzenie Kuratowskiego

Twierdzenie Kuratowskiego (1930):
(charakteryzacja grafów planarnych)

Graf jest planarny $\Leftrightarrow$ nie zawiera podgrafu *homeomorficznego* z K_5 ani z $K_{3,3}$

(dowód nie jest łatwy)

Graf G jest **ściągalny** do grafu H $\Leftrightarrow$ H można otrzymać przez kolejne ściągnięcia krawędzi grafu G.

Twierdzenie (druga charakteryzacja planarności):
Graf jest planarny $\Leftrightarrow$ nie zawiera podgrafu ściągalnego do K_5 ani do $K_{3,3}$

przykład: pokazać, że graf Petersena nie jest planarny (najpierw spróbować z tw. Kuratowskiego a potem z drugiego twierdzenia)

Liczba przecięć

Liczba przecięć $cr(G)$ grafu G, to najmniejsza możliwa liczba przecięć krawędzi w dowolnym rysunku grafu G na płaszczyźnie.

przykład: $cr(K_5) = ?$, $cr(K_{3,3}) = ?$

Liczba przecięć może być interpretowana jako miara "nieplanarności" grafu (np. dla grafu planarnego G, $cr(G) = 0$, etc.)

przykład: graf Petersena, i $K_{4,3}$ ma liczbę przecięć równą 2

Grafy zewnętrznie planarne

Graf nazywamy **zewnętrznie planarnym** $\Leftrightarrow$ można go tak narysować na płaszczyźnie bez przecięć krawędzi, że wszystkie wierzchołki leżą na zewnętrznym obrzeżu.

przykład

Twierdzenie:
Graf jest zewnętrznie planarny $\Leftrightarrow$ nie zawiera grafu homeomorficznego z K_4 ani $K_{2,3}$ ani ściągalnego do żadnego z nich.

Ściany grafu płaskiego

Ścianą grafu płaskiego nazywamy dowolny maksymalny obszar spójny nie będący częścią grafu (krawędzią ani wierzchołkiem) w tym rysunku płaskim.

Jedyną ścianę nieograniczoną nazywamy **ścianą nieskończoną** dla tego rysunku płaskiego.

przykład

Uwaga: to, która ściana jest nieskończona w danym grafie zależy tylko od sposobu narysowania

Rzut stereograficzny

- kładziemy sferę na płaszczyźnie
- rysujemy dowolny obiekt na sferze (Uwaga: nie można tylko rysować po wierzchołku sfery)
- rzut stereograficzny stanowi cień jaki rzucałby rysunek gdyby umieśić punktowe źródło światła w wierzchołku sfery

przykład

Zauważmy, że poprzez przesunięcie na sferze rysunku grafu tak, aby pewna ściana zawierała wierzchołek sfery, czynimy ją ścianą nieskończoną w rzucie na płaszczyźnie.

- istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między punktami sfery (poza wierzchołkiem) a punktami płaszczyzny
- okręgi przechodzącę przez wierzchołek odpowiadają prostym na płaszczyźnie (nieprzecinające się - prostym równoległym), a inne okręgi - okręgom
- czemu na płaszczyźnie odpowiada wierzchołek sfery?

Twierdzenie Eulera

Twierdzenie (Euler, 1750):
Jeśli G jest dowolnym rysunkiem płaskim spójnego grafu planarnego, to zachodzi następujący wzór:

$$n - m + f = 2$$

gdzie: f to liczba ścian w tym rysunku, m jest liczbą krawędzi, a n liczbą wierzchołków
(dowód: łatwy przez indukcję po liczbie krawędzi, trywialnie dla drzew)

przykład

Uwaga: twierdzenie powyższe działa także dla grafów, które nie są proste

Twierdzenie Eulera, c.d.

Twierdzenie powyższe nazywane jest także twierdzeniem o wielościanach (przez rzut stereograficzny działa także dla grafów będących szkieletami wielościanów, gdzie każda ściana ograniczona jest wielokątem, które są 3-spójne)

przykład

Wnioski:

- liczba ścian nie zależy od rysunku
- każda z liczb n, m, f jest jednoznacznie wyznaczona przez 2 pozostałe (dla rysunków płaskich grafów planarnych)

Ograniczenia liczby krawędzi

Z twierdzenia Eulera można wyprowadzić użyteczne wnioski o maksymalnej liczbie krawędzi w spójnych grafach planarnych (oczywiście dotyczą tylko grafów prostych)

Wniosek (z tw. Eulera): jeśli G jest spójnym, prostym grafem planarnym mającym $n \geq 3$ wierzchołków, to:

- jego liczba krawędzi m spełnia: $m \leq 3n - 6$
- jeśli ponadto G nie zawiera trójkątów C_3, to zachodzi: $m \leq 2n - 4$

dowód: dla każdej ściany zachodzi $2m \geq 3f$ (a jeśli nie ma trójkątów, to nawet $2m \geq 4f$), gdyż każda ściana ograniczona jest przez co najmniej 3 krawędzie (odpowiednio: 4 krawędzie), a każda krawędź rozdziela conajwyżej 2 ściany. Teza wynika teraz z podstawienia do wzoru w twierdzeniu Eulera.

Dalsze wnioski

Wniosek:
Grafy K_5 i $K_{3,3}$ są nieplanarne.
(wynika z poprzedniego wniosku)

Twierdzenie:
Każdy graf planarny prosty zawiera co najmniej jeden wierzchołek stopnia niewiększego niż 5.

(dowód: można ograniczyć do składowych spójnych o conajmniej 3 wierzchołkach. Gdyby wszystkie stopnie były co najmniej 6, to dawałoby $6n \leq 2m$, czyli $3n \leq m$, ale przecież $m \leq 3n - 6$, co dawałoby sprzeczność)

Grubość grafu

Grubość $t(G)$ grafu G to najmniejsza liczba "przezroczystych warstw" zawierających rysunki płaskie podgrafów G, które "złożone" dałyby graf G. Jest to inna miara "nieplanarności" grafu.

przykład (K_5, $K_{3,3}$, K_6 mają grubość 2)

Zagadnienie to ma zastosowania np. w elektronice. Grubość oznacza na ilu co najmniej płytkach trzeba drukować dany układ scalony, aby przewody nie przecinały się (nie posiadają one izolacji)

przykład

Twierdzenie (G - prosty, $n \geq 3$):

- $t(G) \geq \lceil m/(3n-6) \rceil$
- $t(G) \geq \lfloor (m+3n-7)/(3n-6) \rfloor$

Inne powierzchnie

Można rozpatrywać inne powierzchnie (rozmaitości topologiczne) niż płaszczyzna 2-wymiarowa, takie jak np. *torus*

przykład

Okazuje się, że liczba przecięć $cr(G)$ grafu może zależeć od powierzchni na jakiej rysujemy graf.

Fakt:
grafy K_5 i $K_{3,3}$ dają się narysować bez przecięć na torusie

Genus powierzchni

Powierzchnia ma **genus** wynoszący g jeśli jest homeomorficzna ze sferą z "doklejonymi" g "uchwytami"

przykład

Genus grafu to najniższy możliwy genus powierzchni, na której można dany graf narysować bez przecięć krawędzi.

przykład (grafy Kuratowskiego mają genus 1)

Twierdzenie:
Genus grafu G jest niewiększy od jego liczby przecięć $cr(G)$

(dowód: każdego potencjalnego przecięcia krawędzi, można uniknąć rysując jedną krawędź na uchwycie a drugą pod uchwytem, analogicznie do bezkolizyjnych skrzyżowań)

Uogólnienie twierdzenia Eulera

Twierdzenie:

Jeśli G jest spójnym grafem o genusie g to zachodzi:
$n - m + f = 2 - 2g$

(idea dowodu wcale nie jest trudna - przez "usuwanie uchwytów")-

przykład

Uwaga: Istnieje też ciekawe uogólnienie twierdzenia wynikającego z tw. Kuratowskiego mówiące, że dla każdego genusu g istnieje skończona liczba "zabronionych" podgrafów (tak jakich jak grafy Kuratowskiego dla genusu 0)

Graf geometrycznie dualny

Graf (geometrycznie) **dualny** G^* do grafu płaskiego G:

- zastępujemy każdą ścianę G wierzchołkiem w G^*
- każde 2 wierzchołki w G^* łączymy krawędzią w G^* $\Leftrightarrow$ istnieje odpowiadająca im krawędź w G, która rozgranicza odpowiednie ściany w G.

przykład

Uwaga: jeśli 2 ściany mają kilka krawędzi rozgraniczających to graf dualny nie jest prosty.

przykład

Twierdzenie:
Jeśli G jest spójnym grafem płaskim, to G^{**} (dualny do dualnego do G), jest izomorficzny z G.

Dualność cykli i rozcięć

(obserwacja: graf dualny G^* ma dokładnie tyle samo krawędzi co G, a ściany zamieniają role z wierzchołkami)

Twierdzenie:
Jeśli G jest planarny a G^* jest geometrycznie dualny do G, to dowolny zbiór krawędzi w G tworzy cykl w G $\Leftrightarrow$ odpowiadający mu zbiór krawędzi w G^* stanowi rozcięcie w G^*

Wniosek:
Każde rozcięcie w G odpowiada cyklowi w G^*.

Uwaga: powyższe twierdzenie ma związek z niezwykłymi własnościami "dualności" cykli i rozcięć obserwowanymi w kontekście cykli i rozcięć fundamentalnych.

Planarność a graf abstrakcyjne dualny

Graf G^* jest **abstrakcyjne dualny** do grafu $G \Leftrightarrow$ istnieje taka wzajemnie jednoznaczna relacja między zbiorami krawędzi G i G^*, że cykle w G odpowiadają krawędziom w G^*.

Uwaga: jest to definicja niezależna od rysunku grafu.

Twierdzenie:
G^* jest abstrakcyjne dualny do $G \Leftrightarrow G$ jest abstrakcyjne dualny do G^*

Twierdzenie:
Graf G jest planarny $\Leftrightarrow$ istnieje graf abstrakcyjnie dualny do G

(Jest to alternatywna do twierdzenia Kuratowskiego charakteryzacja grafów planarnych)

Podsumowanie

- Planarność
- Twierdzenie Kuratowskiego
- Własności planarności
- Twierdzenie Eulera
- Grafy na innych powierzchniach
- Pojęcie dualności geometrycznej i abstrakcyjnej

Przykładowe ćwiczenia

- sprawdzić, czy dany (niewielki) graf jest planarny
- sprawdzić, czy dane grafy są homeomorficzne lub jeden ściągalny do drugiego
- oszacować $t(G)$, $cr(G)$ dla danego grafu
- obliczyc liczbę ścian danego grafu planarnego
- wykonać rzut stereograficzny danego grafu
- znaleźć graf dualny do danego grafu

Dziękuję za uwagę