Grafy i Zastosowania

2: Drogi i Cykle

©Marcin Sydow

Spis Zagadnień

- drogi i cykle
- spójność w tym słaba i silna
- k-spójność (wierzchołkowa i krawędziowa)
- dekompozycja grafu na bloki
- odległości w grafie i pojęcia pochodne
- grafy Eulera i Hamiltona

Drogi(ścieżki)

droga(ścieżka): naprzemienny ciąg wierzchołków i krawędzi $(v_0, e_0, v_1, e_q, \ldots, v_k, e_k, \ldots, v_l)$ taki, że krawędź e_k zawsze łączy wierzchołki v_k, v_{k+1}.

(uwaga: czasami utożsamiamy drogę po prostu z jej podciągiem wierzchołków a czasami z jej podciągiem krawędzi, jeśli nie prowadzi to do nieporozumień)

przykład

Analogicznie definiujemy **drogę skierowaną** w grafie skierowanym.

Uwaga: w różnych podręcznikach istnieją różne konwencje nazewnicze (np. drogi/ścieżki proste, elementarne, trasy, marszruty, etc.).

Drogi(ścieżki) c.d.

droga(ścieżka) prosta: nie powtarzają się krawędzie

droga(ścieżka) elementarna: nie powtarzają się wierzchołki

przykłady

długość drogi: liczba jej krawędzi

(przyjmiemy, że: droga o długości 0: pojedynczy wierzchołek)

przykład

Cykle

cykl: droga/ścieżka o długości conajmniej 3, taka, że $v_0 == v_l$ (początek i koniec są tożsame) (droga/ścieżka zamknięta)

przykład

analogicznie: **cykl elementarny** (za wyjątkiem początkowego i końcowego) i **cykl prosty**

przykłady

Obwód grafu: długość najkrótszego cyklu elementarnego w grafie

przykład: Q_3 ma obwód 4

Spójność

graf jest **spójny** $\Leftrightarrow$ każde jego dwa różne wierzchołki są połączone drogą

przypomnienie (równoważna definicja): graf (niepusty) jest spójny $\Leftrightarrow$ nie jest sumą dwóch niepustych grafów

składowa spójna: maksymalny podgraf grafu, który jest spójny

przykład: (dlaczego maksymalność?)

liczbę składowych spójnych grafu G oznaczamy przez $c(G)$

Silna spójność

(dla grafów skierowanych)

Graf skierowany jest **silnie spójny** $\Leftrightarrow$ dla każdej uporządkowanej pary różnych wierzchołków istnieje droga skierowana z pierwszego do drugiego

uwaga: silna spójność implikuje słabą spójność (nie odwrotnie)

składowa silnie spójna: maksymalny podgraf silnie spójny

składowa słabo spójna: maksymalny podgraf spójny

przykłady

Cyklowa charakteryzacja grafów dwudzielnych

Twierdzenie:
graf jest dwudzielny $\Leftrightarrow$ nie zawiera cykli nieparzystych

przykład

(dowód)

Max. i min. liczba krawędzi

Twierdzenie:
Graf prosty o n wierzchołkach i k składowych ma m krawędzi, gdzie:

$$n - k \leq m \leq (n-k)(n-k+1)/2$$

(dowód)

wniosek: jeśli graf prosty o n wierzchołkach ma więcej niż $(n-1)(n-2)/2$ krawędzi to jest spójny

Zbiór rozspajający

Zbiór rozspajający: taki zbiór krawędzi grafu, po usunięciu którego graf ma więcej składowych spójnych

przykłady

rozcięcie: minimalny zbiór rozspajający (żaden jego podzbiór właściwy nie jest rozspajający)

przykład

most: jednokrawędziowe rozcięcie

przykład

Spójność krawędziowa

Spójność krawędziowa grafu *spójnego* G (oznaczenie: $lambda(G)$) to liczba krawędzi najmniejszego rozcięcia

przykład

graf jest **k-spójny krawędziowo** $\Leftrightarrow k \leq lambda(G)$

przykład: C_4 jest 1-spójny krawędziowo i 2-spójny krawędziowo ale nie 3-spójny krawędziowo

Zbiór rozdzielający

Zbiór rozdzielający to taki podzbiór wierzchołków, po usunięciu którego (wraz z incydentnymi krawędziami) graf ma więcej składowych spójnych

przykład

wierzchołek rozdzielający (nazywany też: **punkt artykulacji**): jednoelementowy zbiór rozdzielający

Spójność (wierzchołkowa) (jako liczba)

spójność (wierzchołkowa) grafu *spójnego* G (oznaczana: $\kappa(G)$) to liczba będąca liczbą elementów najmniejszego zbioru rozdzielającego

przykład

graf jest **k-spójny (wierzchołkowo)** $\Leftrightarrow k \leq \kappa(G)$

przykład: C_4 jest 1-spójny i 2-spójny, ale nie 3-spójny

Zastosowania k-spójności (i krawędziowej)

Projektowanie sieci odpornych na uszkodzenia węzłów lub krawędzi i analizowanie sieci pod kątem takich uszkodzeń.

przykład

Bloki *

blok: maksymalny podgraf grafu nie zawierający punktów artykulacji (wierzchołków rozdzielających) dla tego podgrafu

przykład

fakt: dwa różne bloki grafu mogą mieć w części wspólnej najwyżej 1 wierzchołek

fakt: każda krawędź grafu należy dokładnie do 1 bloku

fakt: wierzchołek jest punktem artykulacyjnym $\Leftrightarrow$ należy do różnych bloków

przykład

Graf blokowy BL(G) *

graf blokowy grafu G (ozn. BL(G)): wierzchołki BL(G) odpowiadają blokom G, krawędź łączy 2 wierzchołki w BL(G) $\Leftrightarrow$ odpowiadające im bloki mają wspólny wierzchołek w G

przykład

Odległość w grafie

Odległość między dwoma wierzchołkami v i w w grafie G: długość najkrótszej ścieżki łączącej v i w

przykład

Własności odległości:
(odległość spełnia następujące warunki metryki):

odległość nazywamy **metryką** $\Leftrightarrow$ dla każdych wierzchołków v,w,z w grafie G:

- $d(v, w) \geq 0$ i $d(v, w) == 0$ tylko dla $v == w$
- $d(v, w) = d(w, v)$ (symetria)
- $d(v, w) + d(w, z) \geq d(v, z)$ (nierówność trójkąta)

Pojęcia oparte na odległości *

Niektóre z tych pojęć używane są m.in. w sieciach społecznych.

Dla grafu G i jego wierzchołka v:

- **średnica** grafu ($diam(G)$): maksymalna odległość między wierzchołkami w tym grafie
- **ekscentryczność** wierzchołka ($ecc(v)$): maksymalna odległość od innego wierzchołka
- **promień** grafu ($rad(G)$): minimalna ekscentryczność wierzchołka w tym grafie
- **wierzchołek centralny**: o minimalnej ekscentryczności (czyli $ecc(v) = rad(G)$)
- **centrum** grafu ($Z(G)$): graf indukowany na zbiorze wierzchołków centralnych grafu G

przykłady

Graf Eulera

(historyjka o Eulerze i mostach na Pregole)

cykl Eulera: taki cykl, który nie powtarza krawędzi i zawiera wszystkie krawędzie grafu

Graf Eulera: graf, w którym istnieje cykl Eulera

(daje się "narysować" bez odrywania długopisu zaczynając i kończąc w tym samym miejscu)

przykład

Graf Pół-eulerowski

ścieżka Eulera: ścieżka, która nie powtarza krawędzi i zawiera wszystkie krawędzie grafu

graf pół-Eulerowski: taki, w którym istnieje ścieżka Eulera

(daje się "narysować" bez odrywania długopisu niekoniecznie zaczynając i kończąc w tym samym miejscu)

przykład

Lemat: jeśli każdy wierzchołek ma stopień przynajmniej 2 to graf zawiera cykl

Twierdzenie Eulera

(Euler 1736)
Graf spójny jest eulerowski $\Leftrightarrow$ każdy jego wierzchołek ma stopień parzysty

(dowód: -> łatwe)

Wniosek: graf spójny jest eulerowski $\Leftrightarrow$ jego zbiór krawędzi można podzielić na rozłączne cykle

Wniosek: Graf spójny jest pół-eulerowski $\Leftrightarrow$ zawiera dokładnie 2 wierzchołki stopnia nieparzystego

przykłady

Znalezienie cyklu Eulera: algorytm Fleury'ego

Graf Hamiltona

cykl Hamiltona: cykl zawierający każdy wierzchołek dokładnie raz

graf Hamiltona: zawiera cykl Hamiltona

graf pół-hamiltonowski: zawiera ścieżkę przechodzącą przez każdy wierzchołek dokładnie raz

przykłady

Trudność Problemu Hamiltona

Nie jest znany wielomianowy algorytm dla problemu stwierdzania czy graf jest Hamiltonowski (problem jest NP-zupełny)

Zauważmy, że graf Eulera miał bardzo prostą charakteryzację (do sprawdzenia w czasie liniowym!)

Warunki wystarczające na hamiltonowskość (przykłady)

Tw Ore'go (1960)
G jest grafem prostym o $n \geq 3$ wierzchołkach i jeśli:

$$deg(v) + deg(w) \geq n$$

zachodzi dla każdej pary wierzchołków niesąsiednich v i w to graf G jest Hamiltonowski

Tw Diraca (wniosek z tw. Ore'go)
Jeśli G jest grafem prostym mającym $n \geq 3$ wierzchołków i dla każdego wierzchołka v zachodzi $deg(v) \geq n/2$ to graf jest hamiltonowski.

Przykład: hamiltonowskość a dwudzielność *

Jeśli graf $G = (V_1 \cup V_2, E)$ jest grafem dwudzielnym to:

- jeśli G jest hamiltonowski, to V_1 i V_2 mają tyle samo elementów
- jeśli G jest pół-hamiltonowski, to liczności V_1 i V_2 różnią się co najwyżej o 1

ponadto, jeśli G jest pełnym grafem dwudzielnym, to:

- jeśli $|V_1| == |V_2|$, to G jest hamiltonowski
- jeśli $||V_1| - |V_2|| \leq 1$ to G jest pół-hamiltonowski

Liczba Cykli Hamiltona *

(dla wybranych grafów)

- graf pełny K_n zawiera dokładnie $(n-1)!/2$ różnych cykli Hamiltona.
- graf pełny K_n, dla n nieparzystego, zawiera dokładnie $(n-1)/2$ *krawędziowo rozłącznych* cykli Hamiltona (dla n parzystego nie ma tak łatwego kryterium)
- graf Petersena nie zawiera cyklu Hamiltona (nie jest hamiltonowski)

Przykładowe pytania/zadania

- definicje: drogi i cykle
- definicje i wyznaczanie: spójność, silna/słaba spójność, składowe (silnie/słabo) spójne
- obliczanie: spójność wierzchołkowa i krawędziowa, $\lambda(G)$, $\kappa(G)$
- ograniczenia na liczbę krawędzi
- obliczyć (narysować) BL(G) mając dany G
- znać definicję i umieć obliczyć odległość, średnicę, ekscentryczność, promień, obwód, wierzchołki centralne
- definicje i umieć sprawdzić czy dany graf jest (pół-)eulerowski, (pół-)hamiltonowski

Dziękuję za uwagę