Grafy i Zastosowania

9: Digrafy (grafy skierowane)

©Marcin Sydow

Spis zagadnień

- Digrafy
- Porządki częściowe
- Turnieje
- Przykłady: głosowanie większościowe, ścieżka krytyczna

Digraf (graf skierowany)

Digraf to równoważny termin z terminem *graf skierowany* (od ang. *directed graph*).

W grafach skierowanych krawędzie są reprezentowane przez pary *uporządkowane* wierzchołków (a nie nieuporządkowane jak w grafach) i nazywane są też **łukami**.

Uwaga: digraf jest naturalnym modelem dla dowolnej relacji binarnej na zbiorze jego wierzchołków (niekoniecznie prosty np. zwrotność implikuje pętle)

Digraf prosty: nie zawiera pętli i łuków wielokrotnych (Uwaga: $(u, v) \neq (v, u)$ dla $u \neq v$).

Szkielet digrafu to graf nieskierowany powstały z zastąpienia każdego łuku (u, v) krawędzią nieskierowaną u, v. Szkielet digrafu prostego nie musi być grafem prostym.

Macierz sąsiedztwa i incydencji digrafu

Macierz sąsiedztwa $A(D)$ digrafu D: a_{ij} to liczba łuków z wierzchołka i do wierzchołka j. Uwaga: nie musi być symetryczna (tak jak było to dla grafów)

Digrafem **przeciwnym** do digrafu D nazywamy digraf D^T, w którym każda krawędź zastąpiona jest krawędzią przeciwną.

Macierz sąsiedztwa digrafu przeciwnego do D to *transponowana* macierz sąsiedztwa grafu D: $A(D^T) = A^T(D)$

przykład

Macierz incydencji digrafu D: d_{ij} wynosi 1 gdy wierzchołek i jest wierzchołkiem końcowym krawędzi j, -1 gdy jest odwrotnie, 0 w pozostałych przypadkach.

przykład

Orientowalność

Graf nieskierowany G nazywamy **orientowalnym** $\Leftrightarrow$ każdą jego krawędź da się zastąpić łukiem tak, że otrzymany digraf jest silnie spójny.

przykład

Twierdzenie:
Spójny graf nieskierowany G jest orientowalny $\Leftrightarrow$ każda jego krawędź jest zawarta w pewnym cyklu (elementarnym).

Wniosek:
Spójny graf nieskierowany G jest orientowalny $\Leftrightarrow$ nie ma mostów

Znajdowanie orientacji (szkic algorytmu): wykonać DFS, każdą krawędź drzewową skierować od ojca do syna, a każdą wsteczną od potomka do przodka (innych nie ma w nieskierowanym).

Przechodniość digrafu

Digraf nazywamy **przechodnim** $\Leftrightarrow$ dla dowolnych wierzchołków u, v, w istnienie krawędzi (u, v) i (v, w) implikuje istnienie krawędzi (u, w).

przykład

Uwaga: digraf jest przechodni $\Leftrightarrow$ reprezentowana przez niego relacja binarna jest przechodnia

domknięcie przechodnie digrafu D to najmniejszy digraf D^c przechodni, którego D jest podgrafem.

Domknięcie przechodnie można obliczać na wiele sposobów, m.in. jako modyfikację (uproszczenie) algorytmu najkrótszych ścieżek pomiędzy wszystkimi parami wierzchołków.

Porządek częściowy *

Porządek częściowy $P = (V, \leq)$ to para składająca się ze zbioru elementów V i relacji binarnej na zbiorze V, która jest:

- zwrotna
- antysymetryczna
- przechodnia

Uwaga: standardowa relacja $\leq$ jest oczywiście porządkiem częściowym, ale w tym kontekście używamy symbolu $\leq$ jako uogólnienia porządku na dowolne relacje abstrakcyjne spełniające powyższą definicję.

przykład (relacja podzielności na zbiorze liczb naturalnych dodatnich niewiększych niż 18)

Podstawowe pojęcia porządków częściowych *

Niech $P = (V, \leq)$ będzie porządkiem częsciowym i $u, v, w \in V$

- elementy u, v nazywamy **porównywalnymi** $\Leftrightarrow u \leq v$ lub $v \leq u$ (w przeciwnym wypadku nazywamy je **nieporównywalnymi**)
- **porządek liniowy** to taki, w którym wszystkie elementy są porównywalne.
- element u jest **maksymalny** $\Leftrightarrow$ nie ma takiego $v \neq u$, że $u \leq v$
- element u jest **minimalny** $\Leftrightarrow$ nie ma takiego $v \neq u$, że $v \leq u$
- v to **następnik** $u \Leftrightarrow v$ jest elementem minimalnym pośród wszystkich elementów $w \neq u$ takich, że $u \leq w$. (ozn. $v \succ u$)
- v to **poprzednik** $u \Leftrightarrow v$ jest elementem maksymalnym pośród wszystkich elementów $w \neq u$ takich, że $v \leq u$. (ozn. $v \prec u$)
- element **największy** to jedyny element maksymalny
- element **najmniejszy** to jedyny element minimalny

przykłady

Diagram Hasse'go porządku częściowego *

Diagram Hassego danego porządku częściowego $P = (V, \leq)$ to rysunek grafu $G = (V, \prec)$ taki, że elementy maksymalne są na górze, i dla dowolnej pary wierzchołków takich, że $u \prec v$ wierzchołek u umieszczamy poniżej v.

przykład

Łańcuchy i antyłańcuchy *

Niech $P(V, \leq)$ będzie porządkiem częściowym.

- podzbiór W zbioru V nazywamy **łańcuchem** $\Leftrightarrow$ wszystkie pary różnych elementów W są porównywalne
- podzbiór W zbioru V nazywamy **antyłańcuchem** $\Leftrightarrow$ wszystkie pary różnych elementów z W są nieporównywalne

(poniższe twierdzenia zachodzą gdy V jest zbiorem skończonym)

Twierdzenie Dilworth'a:
Minimalna liczba łańcuchów niezbędnych do pokrycia całego zbioru V równa jest maksymalnej liczności antyłańcucha w P.

Dualne twierdzenie Dilworth'a:
Minimalna liczba antyłańcuchów niezbędnych do pokrycia zbioru V równa jest maksymalnej liczności łańcucha w P.

Digrafy eulerowskie

Digraf jest **eulerowski** $\Leftrightarrow$ istnieje prosty cykl skierowany zawierający wszystkie krawędzie

Fakty:

- Digraf jest eulerowski $\Leftrightarrow$ dla każdego wierzchołka v zachodzi $indeg(v) = outdeg(v)$
- każdy digraf eulerowski jest silnie spójny

Digrafy pół-eulerowskie

(każdy graf eulerowski jest pół-eulerowski)

Fakt:
Digraf nie będący eulerowskim jest pół-eulerowski $\Leftrightarrow$ dla każdego wierzchołka v poza dwoma u, w, $indeg(v) = outdeg(v)$, u, w mają stopnie nieparzyste oraz $indeg(u) = outdeg(u) + 1$ i $indeg(w) = outdeg(w) - 1$.

przykład

Digrafy hamiltonowskie

Nie jest znana prosta charakteryzacja digrafów hamiltonowskich. Znane są pewne warunki konieczne, np:

Tw. Silnie spójny digraf o n wierzchołkach, w którym dla każdego wierzchołka v zachodzi: $outdeg(v) \geq n/2$ i $indeg(v) \geq n/2$ jest hamiltonowski.

przykład

fakt: digraf hamiltonowski jest silnie spójny

Źródło i ujście

W dowolnym digrafie wierzchołek v nazywamy:

- **źródłem** $\Leftrightarrow$ $indeg(v) = 0$
- **ujściem** $\Leftrightarrow$ $outdeg(v) = 0$

przykład

Fakt:
Każdy digraf acykliczny ma conajmniej 1 źródło i 1 ujście
(dowód prosty przez kontrapozycję)

Kondensacja digrafu *

Kondensacja digrafu D (ozn. $cond(D)$) to taki digraf, którego wierzchołki stanowią składowe silnie spójne grafu D a łuk ze składowej C do składowej C' istnieje $\Leftrightarrow$ istnieje krawędź (v, w) dla pewnych wierzchołków $v \in C$ i $w \in C'$.

przykład

Fakt:
Kondensacja każdego grafu jest acykliczna

(dowód: wynika z definicji kondensacji)

Turniej

Turniej to digraf, którego szkielet jest grafem pełnym.

przykład

Turniej stanowi dobry model np. do reprezentacji wyników rozgrywek parami n zawodników, w których gra "każdy z każdym" i wynik każdej rozgrywki kończy się wygraną dokładnie jednego z dwóch (nie ma remisów). Łuk (i, j) oznacza wówczas, że i wygrał z j.

Fakt:
Turniej może mieć conajwyżej 1 źródło i conajwyżej 1 ujście (dlaczego?)

Fakt:
Jest $2^{n(n-1)/2}$ różnych turniejów etykietowanych o n wierzchołkach (dlaczego?).

Turnieje Hamiltona

Twierdzenie:

- każdy turniej silnie spójny jest hamiltonowski
- turniej nie będący digrafem hamiltonowskim jest pół-hamiltonowski

Wniosek:
W każdym turnieju da się uporządkować zawodników w ciąg taki, że poprzedni pokonał następnego w tym ciągu (odpowiada to ścieżce hamiltona)

Turnieje c.d.

Turniej nazywamy **nierozkładalnym** $\Leftrightarrow$ nie można podzielić jego zbioru wierzchołków na 2 rozłączne podzbiory V_1 i V_2 takie, że każdy łuk pomiędzy tymi podzbiorami prowadzi z V_1 do V_2.

przykład

Twierdzenie:

Turniej jest silnie spójny $\Leftrightarrow$ jest nierozkładalny

Rankingi w turniejach

Wynik wierzchołka v w turnieju to jego stopień wyjściowy (interpretacja: z iloma graczami wygrał)

Ranking turnieju to ciąg nierosnący wyników turnieju odpowiadający wszystkim wierzchołkom tego turnieju

przykład

Twierdzenie:
Ciąg niemalejący n liczb naturalnych $(w_1, \ldots, w_n)$ jest rankingiem pewnego turnieju o n wierzchołkach$\Leftrightarrow$ dla każdego $1 \leq i \leq n$ zachodzi $\sum_{i=1}^{r} w_r \geq r(r-1)/2$ przy czym dla $r == n$ zachodzi równość.

przykład

Charakteryzacja turniejów przechodnich

Twierdzenie:
Następujące warunki są równoważne:

- turniej jest acykliczny
- turniej jest przechodni
- ranking turnieju jest ciągiem ściśle malejącym (nie ma wyników "ex aequo")

Wniosek: kondensacja dowolnego turnieju ma ślíśle malejący ranking

Król *

Pomiędzy wierzchołkiem v i w digrafu zachodzi **dominacja stopnia k**, $k \in N \Leftrightarrow$ istnieje skierowana ścieżka z v do w długości k.

Król turnieju to wierzchołek v taki, że każdy inny wierzchołek jest zdominowany stopnia 1 lub 2 przez v tzn. osiągalny z v drogą o długości co najwyżej 2 (słabsza wersja zwycięzcy turnieju).

przykład

Twierdzenie:
Każdy turniej ma króla
(szkic dowodu: przez indukcję po liczbie wierzchołków, w mniejszym grafie (po usunięciu pewnego wierzchołka v) rozpatrzyć zbiór składający się z króla w mniejszym grafie (z założenia indukcyjnego) i zdominowanych w stopniu 1 przez niego oraz rozpatrzyć 2 możliwe przypadki skierowania krawędzi pomiędzy tym zbiorem a usuniętym wierzchołkiem v w wyjściowym (większym) turnieju.

Głosowanie większościowe

Załóżmy że mamy k głosujących i n obiektów preferencji (np. kandydatów na prezydenta)

Turniej n-wierzchołkowy jest wtedy naturalnym modelem dla preferencji głosującego k (każdy łuk reprezentuje preferencję), zakładając, że głosujący ściśle preferuje dowolny obiekt preferencji względem innego.

Jeżeli turniej taki jest acykliczny, nazywamy preferencje *racjonalnymi*

przykład

Głosowanie większościowe polega na *agregacji* k turniejów w jeden zagregowany turniej T, tak, że obiekt v jest preferowany niż w (tzn jest krawędź (v, w)) $\Leftrightarrow$ v jest preferowany przez większość głosujących (tzn. w większości turniejów).

Paradoks Condorcet'a

Zdawałoby się, że opisana powyżej procedura głosowania większościowego przez agregację turniejów racjonalnych (przynajmniej dla nieparzystej liczby głosujących) prowadzi zawsze do racjonalnego wyniku głosowania (czyli: turnieju dającego ściśle malejący ranking, acyklicznego).

Paradoks Condorcet'a polega na tym, że tak nie jest, tzn. że mimo, że wszystkie preferencje są racjonalne (czyli: turnieje są acykliczne) zagregowany turniej *może zawierać cykle* a więc nie da się utworzyć (ściśle malejącego) rankingu preferencji głosujących.

przykład: $(A > B > C,\ B > C > A,\ C > A > B)$

Przykład zastosowania: problem ścieżki krytycznej

Problem:
Załóżmy, że jest do wykonania pewne złożone zadanie (np. budowa domu) składające się z wykonania pewnych pod-zadań (np. wykopanie dołu, wylanie fundamentów, etc.), przy czym pewne zadania można wykonać tylko po upływie pewnego podanego czasu od pewnych innych zadań natomiast poza tym pod-zadania można wykonywać równolegle. Przykładowy problem: oszacować minimalny czas niezbędny do wykonania całego zadania.

Reprezentacja problemu:
Jako modelu można użyć grafu skierowanego z wagami z jednym źródłem i jednym ujściem. Zadanie można reprezentować przez digraf D, gdzie wierzchołki reprezentują pod-zadania a łuki z wagami reprezentują relację precedencji wraz z niezbędnym czasem odczekiwania pomiędzy zadaniami (np. po wylaniu fundamentów należy odczekać x dni zanim zacznie się stawiać ściany, etc.).

Problem ścieżki krytycznej, c.d.

Obserwacja:
Zadanie da się wogóle wykonać $\Leftrightarrow$ digraf jest acykliczny.
Zadanie polega na znalezieniu najdłuższej drogi (elementarnej) z wierzchołka początkowego do końcowego.

Rozwiązanie:
(modyfikacja algorytmu najkrótszych ścieżek)
Sortujemy topologicznie digraf i następnie od wierzchołka najwcześniejszego wykonujemy BFS, w każdym wierzchołku obliczając maksimum najdłuższej drogi po wchodzących do niego krawędziach.

przykład

Podsumowanie

- Digrafy
- Porządki częściowe
- Turnieje
- Przykłady: głosowanie większościowe, ścieżka krytyczna

Przykładowe ćwiczenia/zadania

- dokonaj kondensacji podanego grafu skierowanego
- oblicz domknięcie przechodnie danego grafu
- sprawdź, czy dana relacja jest porządkiem i jeśli tak, to wykonaj diagram Hassego zaznaczając elementy maksymalne, minimalne, łańcuchy, antyłańcuchy, etc.
- znajdź ścieżkę krytyczną w podanym grafie acyklicznym z wagami
- sprawdź czy dany turniej ma ranking, jest przechodni, silnie spójny, hamiltonowski, etc.
- dokonaj agregacji Condorcet'a podanych turniejów

Dziękuję za uwagę