

Przetwarzanie i Kompresja Obrazów. Filtracja

Aleksander Denisiuk (denisjuk@pja.edu.pl)
Polsko-Japońska Akademia Technik Komputerowych
Wydział Informatyki w Gdańsku
ul. Brzegi 55, 80-045 Gdańsk

17 kwietnia 2016

Modele filtracji

Wygładzanie
obrazu

Wzmocnienie
obrazu

Odzyskanie
obrazu

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem
<http://users.pja.edu.pl/~denisjuk/>

Modele filtracji

Czarna skrzynka

Filtry liniowe

Filtry splotowe

Wygładzanie
obrazu

Wzmocnienie
obrazu

Odzyskanie
obrazu

Modele filtracji

Modele filtracji

Czarna skrzynka

Filtry liniowe

Filtry splotowe

Wygładzanie
obrazu

Wzmocnienie
obrazu

Odzyskanie
obrazu

■ $f(x, y) \mapsto g(x, y) = \mathcal{P}f(x, y)$

■ Typowe zastosowania:

- odszumowanie
- wygładzanie
- wyostrzanie
- uwypuklenie detali
- krawędziowanie
- filtry artystyczne



Modele filtracji

Czarna skrzynka

Filtry liniowe

Filtry splotowe

Wygładzanie
obrazu

Wzmocnienie
obrazu

Odzyskanie
obrazu

- Filtr \mathcal{P} nazywa się **liniowym**, jeżeli
$$\mathcal{P}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \mathcal{P}(f_1) + \beta \mathcal{P}(f_2)$$
- Inne filtry nazywają się **nieliniowymi**

Modele filtracji

Czarna skrzynka

Filtry liniowe

Filtry splotowe

Wygładzanie
obrazu

Wzmocnienie
obrazu

Odzyskanie
obrazu

- Filtr \mathcal{P} nazywa się **translacyjnie-niezmienniczym**, jeżeli

$$\mathcal{P}(f(x - u, y - v)) = \mathcal{P}f(x - u, y - v)$$

- Filtr liniowy i translacyjnie-niezmienniczny nazywa się **splotowym**

$$\square \quad \mathcal{P}f(x, y) = f * h(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u, y-v)h(u, v) du dv,$$

gdzie $h(u, v)$ jest **jądrem splotowym** (funkcją odpowiedzi impulsowej)

- $g = f * h \iff G = F \cdot H$, gdzie G , F i H są transformacjami Fouriera odpowiednio g , f oraz h , $H(u, v)$ nazywa się **funkcją transmisji**

$$\square \quad g(i, j) = f(i, j) * h(i, j) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} h(k, l) f(k + i, l + j)$$

- h jest zazwyczaj symetryczną macierzą

Modele filtracji

Wygładzanie obrazu

Zagadnienie

Uśrednienie
z sąsiedztwem

Rozmycie
Gaussa

Uśrednienie
medianami

Idealny dolno-
przepustowy
filtr

Filtr
trapezoidalny

Filtr
Butterwortha

Wzmocnienie obrazu

Odzyskanie obrazu

Wygładzanie obrazu

Modele filtracji

Wygładzanie obrazu

Zagadnienie

Uśrednienie z sąsiedztwem

Rozmycie

Gaussa

Uśrednienie medianami

Idealny dolno-przepustowy filtr

Filtr

trapezoidalny

Filtr

Butterwortha

Wzmocnienie obrazu

Odzyskanie obrazu

- Redukcja szumu
- Uśrednienie
- Metody przestrzenne
 - liniowe
 - uśrednienie z sąsiedztwem
 - rozmycie Gaussa
 - nieliniowe
 - uśrednienie poprzez mediany
- Metody widmowe
 - filtry dolnoprzepustowe

Modele filtracji

Wygładzanie obrazu

Zagadnienie

Uśrednienie z sąsiedztwem

Rozmycie

Gaussa

Uśrednienie medianami

Idealny dolno-przepustowy filtr

Filtr

trapezoidalny

Filtr

Butterwortha

Wzmocnienie obrazu

Odzyskanie obrazu

- Wybiera się **okno** 3×3 albo 5×5 , zawierające dany piksel

- 4-sąsiednie średnie:
$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

- 8-sąsiednie średnie:
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$
 — także 8-sąsiednie średnie

Modele filtracji

Wygładzanie obrazu

Zagadnienie

Uśrednienie z sąsiedztwem

Rozmycie Gaussa

Uśrednienie medianami

Idealny dolno-przepustowy filtr

Filtr trapezoidalny

Filtr Butterwortha

Wzmocnienie obrazu

Odzyskanie obrazu

- Wybiera się próg $\tau > 0$
- Oblicza się średnią: a
- Jeżeli stara wartość różni się od średniej mniej, niż próg, zostawia się starą wartość
- dla 4-sąsiednich średnich:
 - $a = \frac{1}{4}(f(x-1, y) + f(x, y-1) + f(x, y+1) + f(x+1, y))$
 - $$g(x, y) = \begin{cases} a, & |f(x, y) - a| > \tau, \\ f(x, y), & |f(x, y) - a| \leq \tau. \end{cases}$$

Modele filtracji

Wygładzanie obrazu

Zagadnienie

Uśrednienie z sąsiedztwem

Rozmycie Gaussa

Uśrednienie medianami

Idealny dolno-przepustowy filtr

Filtr trapezoidalny

Filtr Butterwortha

Wzmocnienie obrazu

Odzyskanie obrazu

- Jądro splotowe Gaussa $h(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$
 - jest rozdzielczym
 - jest symetrycznym względem rotacji
 - ma takie same wygładzanie w każdym kierunku

Okno 7×7 dla $\sigma = \sqrt{2}$

Modele filtracji	$\frac{1}{4\pi}$	(0.011	0.039	0.082	0.105	0.082	0.039	0.011)
Wygładzanie obrazu			0.039	0.135	0.287	0.368	0.287	0.135	0.039	
Zagadnienie			0.082	0.287	0.606	0.779	0.606	0.287	0.082	
Uśrednienie z sąsiedztwem			0.105	0.368	0.779	1.000	0.779	0.368	0.105	
Rozmycie Gaussa			0.082	0.287	0.606	0.779	0.606	0.287	0.082	
Uśrednienie medianami			0.039	0.135	0.287	0.368	0.287	0.135	0.039	
Idealny dolno-przepustowy filtr			0.011	0.039	0.082	0.105	0.082	0.039	0.011	
Filtr trapezoidalny										
Filtr Butterwortha										
Wzmocnienie obrazu										
Odzyskanie obrazu										

Okno 7×7 dla $\sigma = \sqrt{2}$, liczby całkowite

- Modele filtracji
- Wygładzanie obrazu
- Zagadnienie
- Uśrednienie z sąsiedztwem
- Rozmycie Gaussa
- Uśrednienie medianami
- Idealny dolno-przepustowy filtr
- Filtr trapezoidalny
- Filtr Butterwortha
- Wzmocnienie obrazu
- Odzyskanie obrazu

$$\frac{1}{1115} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 & 7 & 4 & 1 \\ 4 & 12 & 26 & 33 & 26 & 12 & 4 \\ 7 & 26 & 55 & 71 & 55 & 26 & 7 \\ 10 & 33 & 71 & 91 & 71 & 33 & 10 \\ 7 & 26 & 55 & 71 & 55 & 26 & 7 \\ 4 & 12 & 26 & 33 & 26 & 12 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Modele filtracji

Wygładzanie obrazu

Zagadnienie

Uśrednienie z sąsiedztwem

Rozmycie

Gaussa

Uśrednienie medianami

Idealny dolno-przepustowy filtr

Filtr trapezoidalny

Filtr Butterwortha

Wzmocnienie obrazu

Odzyskanie obrazu

- Wybieramy piksele z sąsiedztwa
- Dany piksel jest zastąpiony przez medianę
 - uporządkować wartości rosnąco
 - wybrać tę, która będzie pośrodku
- Okno 3×3 albo 5×5

Modele filtracjiWygładzanie
obrazu

Zagadnienie

Uśrednienie
z sąsiedztwemRozmycie
GaussaUśrednienie
medianamiIdealny dolno-
przepustowy
filtrFiltr
trapezoidalnyFiltr
ButterworthaWzmocnienie
obrazuOdzyskanie
obrazu

- Obraz:

$$\begin{pmatrix} 200 & 201 & 202 & 202 & 203 & 202 & 200 & 198 \\ 202 & 203 & 205 & 204 & 204 & 202 & 200 & 197 \\ 205 & 210 & \mathbf{211} & 212 & 210 & 209 & 208 & 205 \\ 205 & 210 & 208 & 212 & 215 & 213 & 218 & 212 \\ 217 & 214 & 219 & 210 & 211 & 220 & 218 & 208 \\ 212 & 214 & 218 & 220 & 220 & 219 & 218 & 218 \\ 210 & 212 & 213 & 215 & 216 & 216 & 210 & 212 \\ 208 & 208 & 210 & 211 & 212 & 214 & 210 & 210 \end{pmatrix}$$
- 3×3 sąsiedztwo

$$\begin{pmatrix} 203 & 205 & 204 \\ 210 & 211 & 212 \\ 210 & 208 & 212 \end{pmatrix}$$
- Wartości uporządkowane:
203 204 205 208 210 211 212 212 213
- Mediana (i nowa wartość): 210

Modele filtracji

Wygładzanie obrazu

Zagadnienie

Uśrednienie z sąsiedztwem

Rozmycie Gaussa

Uśrednienie medianami

Idealny dolno-przepustowy filtr

Filtr trapezoidalny

Filtr Butterwortha

Wzmocnienie obrazu

Odzyskanie obrazu

- Powiększamy krotność pikseli

- Przykładowo:

- dla okna 3×3

$$\begin{pmatrix} f(i-1, j+1) & f(i, j+1) & f(i+1, j+1) \\ f(i-1, j) & f(i, j) & f(i+1, j) \\ f(i-1, j-1) & f(i, j-1) & f(i+1, j-1) \end{pmatrix}$$

- możliwe wagi są: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- w poprzednim przykładzie:

- wartości uporządkowane:

203	204	205	205	208	210	210	211
211	211	212	212	212	213	213	

- mediana (i nowa wartość): 211

Idealny dolnoprzepustowy filtr

Modele filtracji

Wygładzanie obrazu

Zagadnienie

Uśrednienie z sąsiedztwem

Rozmycie Gaussa

Uśrednienie medianami

Idealny dolnoprzepustowy filtr

Filtr trapezoidalny

Filtr Butterwortha

Wzmocnienie obrazu

Odzyskanie obrazu

- Funkcja transmisji $H(u, v) = \begin{cases} 1, & D(u, v) < D_0, \\ 0, & D(u, v) \geq D_0, \end{cases}$ gdzie D_0 to jest **częstotliwość graniczna**, $D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$
- skok w domenie widmowej powoduje artefakty w domenie fizycznej (rozmazanie, pierścienie, etc)

Trapezoidalny dolnoprzepustowy filtr

Modele filtracji

Wygładzanie
obrazu

Zagadnienie

Uśrednienie
z sąsiedztwem

Rozmycie
Gausa

Uśrednienie
medianami

Idealny dolno-
przepustowy
filtr

Filtr
trapezoidalny

Filtr
Butterwortha

Wzmocnienie
obrazu

Odzyskanie
obrazu

- $$H(u, v) = \begin{cases} 1, & D(u, v) \leq D_0, \\ \frac{D(u, v) - D_1}{D_0 - D_1}, & D_0 < D(u, v) < D_1, \\ 0, & D(u, v) \geq D_1, \end{cases}$$
- gdzie $D_0 < D_1$.

Modele filtracji

Wygładzanie
obrazu

Zagadnienie

Uśrednienie
z sąsiedztwem

Rozmycie
Gaussa

Uśrednienie
medianami

Idealny dolno-
przepustowy
filtr

Filtr
trapezoidalny

**Filtr
Butterwortha**

Wzmocnienie
obrazu

Odzyskanie
obrazu

- $$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)}{D_0} \right]^n},$$
- gdzie n jest rzędem filtru, D_0 jest częstotliwością graniczną.

Modele filtracji

Wygładzanie
obrazu

Wzmocnienie
obrazu

Zagadnienie

Gradient

Krzyż Robertsa

Operator
Prewitta

Operator Sobela

Operator
Laplace'a

Idealny górno-
przepustowy
filtr

Filtr
trapezoidalny

Filtr
Butterwortha

Odzyskanie
obrazu

Wzmocnienie obrazu

Modele filtracji

Wygładzanie
obrazu

Wzmocnienie
obrazu

Zagadnienie

Gradient

Krzyż Robertsa

Operator

Prewitta

Operator Sobela

Operator

Laplace'a

Idealny górno-
przepustowy
filtr

Filtr

trapezoidalny

Filtr

Butterwortha

Odzyskanie
obrazu

- Wyostrzanie zdjęcia
- Wzmocnienie fragmentu, np. krawędzi

Modele filtracji

Wygładzanie
obrazu

Wzmocnienie
obrazu

Zagadnienie

Gradient

Krzyż Robertsa

Operator
Prewitta

Operator Sobela

Operator
Laplace'a

Idealny górno-
przepustowy
filtr

Filtr
trapezoidalny

Filtr
Butterwortha

Odzyskanie
obrazu

- Niech dana będzie funkcja $f(x, y)$
- Wektor **gradient** $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ pokazuje kierunek i stopień wzrastania funkcji
- Długość gradientu można obliczyć według trzech podstawowych norm

□ euklidesowa: $\|\nabla f\|_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$

□ ℓ_1 : $\|\nabla f\|_1 = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$

□ ℓ_∞ : $\|\nabla f\|_\infty = \max \left\{ \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \right\}$

Modele filtracji

Wygładzanie obrazu

Wzmocnienie obrazu

Zagadnienie

Gradient

Krzyż Robertsa

Operator Prewitta

Operator Sobela

Operator Laplace'a

Idealny górno-przepustowy filtr

Filtr trapezoidalny

Filtr Butterwortha

Odzyskanie obrazu

- Obraz zastąpiony przez gradient w każdym punkcie:

$$g(x, y) = \nabla f(x, y)$$

- Wyostrzenie granic:

$$g(x, y) = \begin{cases} b_h, & \text{jeżeli } \|\nabla f(x, y)\| > \tau, \\ f(x, y) & \text{inaczej} \end{cases}$$

- τ jest wartością graniczną
- b_h jest wartością bliską białego koloru

- Tylko granice: $g(x, y) = \begin{cases} b_h, & \text{jeżeli } \|\nabla f(x, y)\| > \tau, \\ b_l & \text{inaczej} \end{cases}$

- τ jest wartością graniczną
- b_h jest wartością bliską białego koloru
- b_l jest wartością bliską czarnego koloru, $b_l < b_h$

Modele filtracji

Wygładzanie obrazu

Wzmocnienie obrazu

Zagadnienie

Gradient

Krzyż Robertsa

Operator Prewitta

Operator Sobela

Operator Laplace'a

Idealny górno-przepustowy filtr

Filtr trapezoidalny

Filtr Butterwortha

Odzyskanie obrazu

- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \approx f(x+1, y) - f(x, y), \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \approx f(x, y+1) - f(x, y)$

- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \approx \frac{1}{2}(f(x+1, y) - f(x-1, y)),$

- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \approx \frac{1}{2}(f(x, y+1) - f(x, y-1))$

- $\frac{\partial f}{\partial x} = h_x * f, \frac{\partial f}{\partial y} = h_y * f, \text{ gdzie}$

- $h_x = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, h_y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- albo $h_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, h_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Modele filtracji

Wygładzanie
obrazu

Wzmocnienie
obrazu

Zagadnienie

Gradient

Krzyż Robertsza

Operator

Prewitta

Operator Sobela

Operator

Laplace'a

Idealny górno-
przepustowy
filtr

Filtr

trapezoidalny

Filtr

Butterwortha

Odzyskanie
obrazu

- $h_x = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, h_y = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\|\nabla f(i, j)\|_1 = |f(i+1, j+1) - f(i, j)| + |f(i, j+1) - f(i+1, j)|$

Modele filtracji

Wygładzanie
obrazu

Wzmocnienie
obrazu

Zagadnienie

Gradient

Krzyż Robertsa

**Operator
Prewitta**

Operator Sobela

Operator
Laplace'a

Idealny górno-
przepustowy
filtr

Filtr
trapezoidalny

Filtr
Butterwortha

Odzyskanie
obrazu

- $h_x = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \end{pmatrix}, h_y = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
- Wykorzystanie normy euklidesowej $\|\nabla f\|_2$

Modele filtracji

Wygładzanie
obrazu

Wzmocnienie
obrazu

Zagadnienie

Gradient

Krzyż Roberts'a

Operator
Prewitta

Operator Sobela

Operator
Laplace'a

Idealny górno-
przepustowy
filtr

Filtr
trapezoidalny

Filtr
Butterwortha

Odzyskanie
obrazu

- $h_x = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & 0 & +1 \\ -2 & 0 & +2 \\ -1 & 0 & +1 \end{pmatrix}, h_y = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} +1 & +2 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
- Wykorzystanie normy euklidesowej $\|\nabla f\|_2$

Modele filtracji

Wygładzanie
obrazu

Wzmocnienie
obrazu

Zagadnienie

Gradient

Krzyż Robertsa

Operator
Prewitta

Operator Sobela

Operator
Laplace'a

Idealny górno-
przepustowy
filtr

Filtr
trapezoidalny

Filtr
Butterwortha

Odzyskanie
obrazu

- $\nabla^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
- Bezpośrednio pokazuje prędkość zmiany gradientu
- $\nabla^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Idealny górnoprzepustowy filtr

Modele filtracji

Wygładzanie obrazu

Wzmocnienie obrazu

Zagadnienie

Gradient

Krzyż Robertsa

Operator Prewitta

Operator Sobela

Operator Laplace'a

Idealny górnoprzepustowy filtr

Filtr trapezoidalny

Filtr Butterwortha

Odzyskanie obrazu

- Funkcja transmisji $H(u, v) = \begin{cases} 0, & D(u, v) < D_0, \\ 1, & D(u, v) \geq D_0, \end{cases}$ gdzie D_0 to jest **częstotliwość graniczna**, $D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$
- skok w domenie widmowej powoduje artefakty w domenie fizycznej (rozmazanie, pierścienie, etc)

Trapezoidalny górnoprzepustowy filtr

Modele filtracji

Wygładzanie
obrazu

Wzmocnienie
obrazu

Zagadnienie

Gradient

Krzyż Robertsa

Operator

Prewitta

Operator Sobela

Operator

Laplace'a

Idealny górno-
przepustowy
filtr

Filtr

trapezoidalny

Filtr

Butterwortha

Odzyskanie
obrazu

- $$H(u, v) = \begin{cases} 0, & D(u, v) \leq D_1, \\ \frac{D(u, v) - D_1}{D_0 - D_1}, & D_1 < D(u, v) < D_0, \\ 1, & D(u, v) \geq D_0, \end{cases}$$
- gdzie $D_1 < D_0$.

Filtr Butterwortha (górnoprzepustowy)

Modele filtracji

Wygładzanie
obrazu

Wzmocnienie
obrazu

Zagadnienie

Gradient

Krzyż Robertsa

Operator

Prewitta

Operator Sobela

Operator

Laplace'a

Idealny górno-
przepustowy
filtr

Filtr

trapezoidalny

Filtr

Butterwortha

Odzyskanie
obrazu

- $H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D_0}{D(u, v)}\right]^n}$,
- gdzie n jest rzędem filtru, D_0 jest częstotliwością graniczną.

Modele filtracji

Wygładzanie
obrazu

Wzmocnienie
obrazu

Odzyskanie
obrazu

Degradacja
obrazu

Odzyskanie obrazu

Modele filtracji

Wygładzanie
obrazu

Wzmocnienie
obrazu

Odzyskanie
obrazu

Degradacja
obrazu

- Podobno do filtracji: $f(x, y) \mapsto g(x, y) = \mathcal{P}f(x, y)$
- Szum: $f(x, y) \mapsto g(x, y) = \mathcal{P}f(x, y) + n(x, y)$

- Gaussa: $p_G(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

- dychotomiczny (telegraficzny):

$$p_I(z) = \begin{cases} p_a & z = a \\ p_b & z = b \\ 0 & \text{w innych przypadkach} \end{cases}$$

- Odzyskanie obrazu: odwrócenie przekształcenia degradacji