Przetwarzanie i Kompresja Obrazów. Przekształcenia geometryczne

Aleksander Denisiuk (denisjuk@pja.edu.pl)
Polsko-Japońska Akademia Technik Komputerowych
Wydział Informatyki w Gdańsku
ul. Brzegi 55, 80-045 Gdańsk

1 kwietnia 2016

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem
http://users.pja.edu.pl/~denisjuk/

Przekształcenia afiniczne

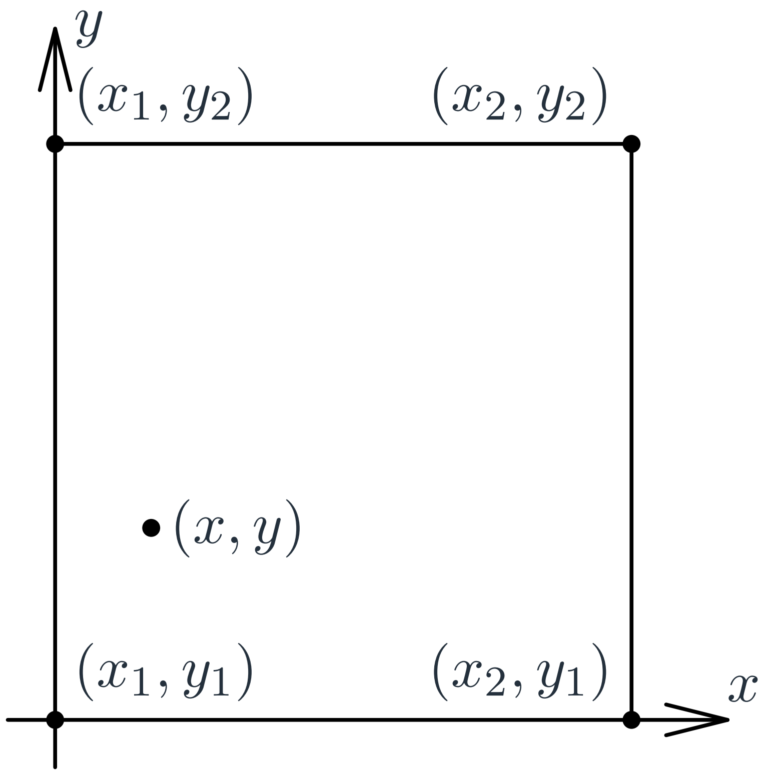
- $(x, y) \mapsto (1 - x, y)$
- $(x, y) \mapsto (x, 1 - y)$

- $(x, y) \mapsto (\lambda_1 x, \lambda_2 y)$

- Konieczne jest zastosowanie interpolacji

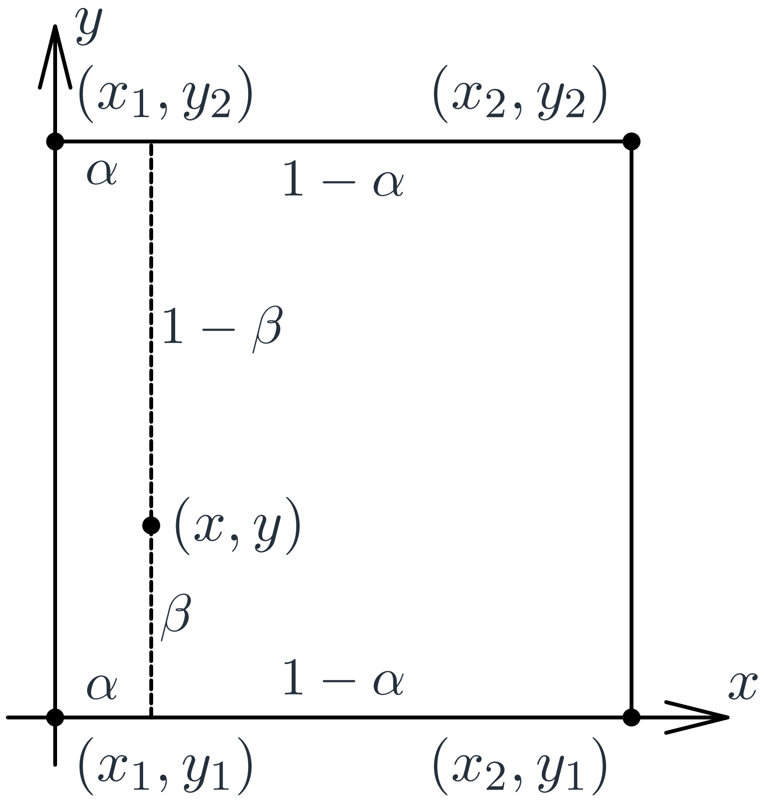
Metoda najbliższego sąsiedztwa

- $f(x, y) = f(x_i, y_j)$, gdzie $|x - x_i|$ oraz $|y - y_j|$ są minimalne

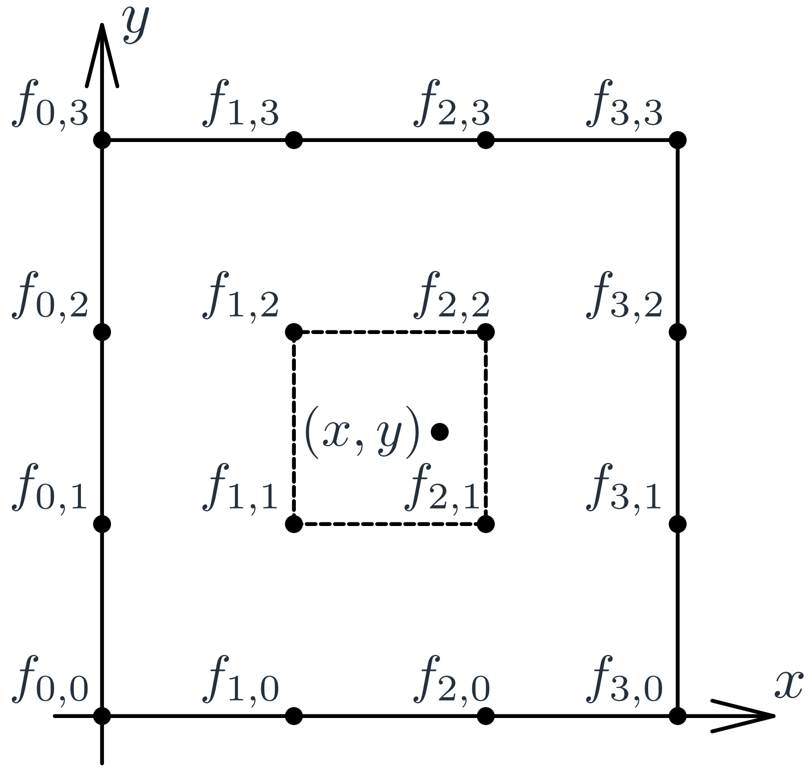


Interpolacja biliniowa

- $f(x, y) = (1 - \beta) f_1 + \beta f_2$, gdzie
  - $f_j = (1 - \alpha) f(x_1, y_j) + \alpha f(x_x, y_j)$ $(j = 1, 2)$, gdzie
    - $\alpha = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = x - x_1$, $\beta = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = y - y_1$



- $f(x,y) = f_0 + f_1(y-y_0) + \frac{1}{2}(f_2 - 2f_1 + f_0)(y-y_0)(y-y_1) + \frac{1}{6}(f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0)(y-y_0)(y-y_1)(y-y_2)$, gdzie
  - $f_j = f_{0,j} + f_{1,j}(x-x_0) + \frac{1}{2}(f_{2,j} - 2f_{1,j} + f_{0,j})(x-x_0)(x-x_1) + \frac{1}{6}(f_{3,j} - 3f_{2,j} + 3f_{1,j} - f_{0,j})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$



Ponadto

- Interpolacja za pomocą spline'ów
- Interpolacja w dziedzinie widmowej

- $(x, y) \mapsto (x\cos\phi - y\sin\phi, x\sin\phi + y\cos\phi)$


- Dookoła początku układu współrzędnych
  - dookoła punktu (x_0, y_0) przekształcenie jest dane macierzą: $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & -x_0\cos\phi + y_0\sin\phi + x_0 \\ \sin\phi & \cos\phi & -x_0\sin\phi - y_0\cos\phi + y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{tg}\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Względem początku układu współrzędnych
- Nachylenie w lewo
  - dla ujemnych kątów w prawo

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{tg}\phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Względem początku układu współrzędnych
- Nachylenie w lewo
  - dla ujemnych kątów w prawo

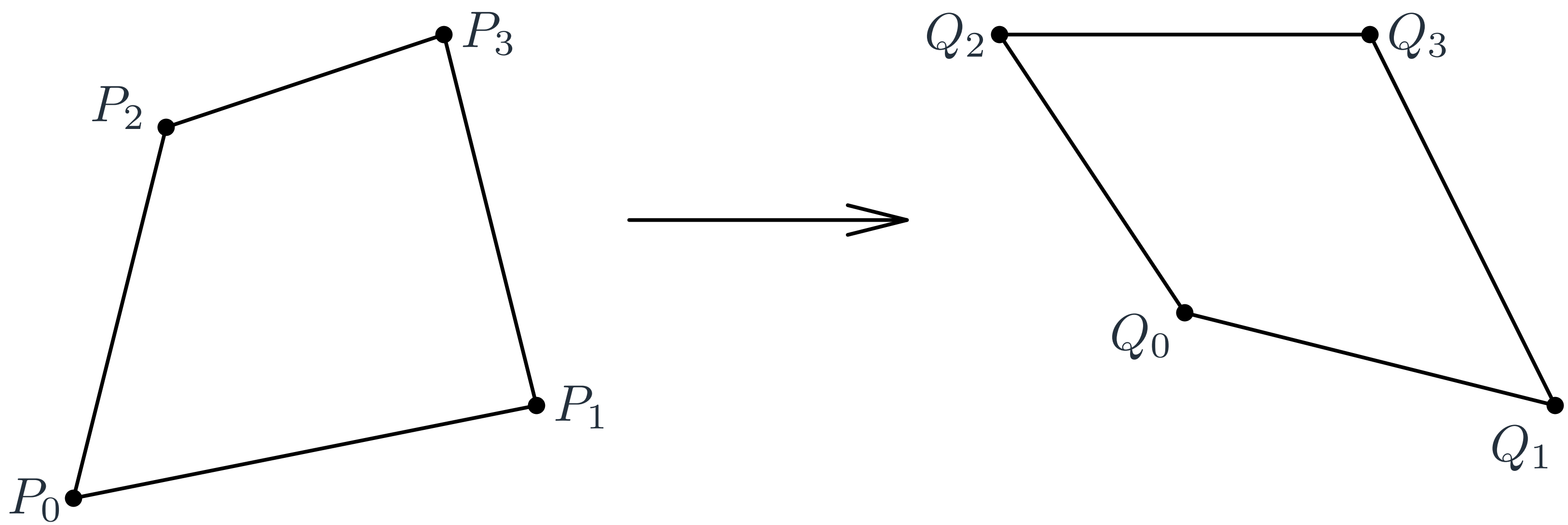
- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Przekształcenia rzutowe

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
  - zazwyczaj wymaga się $\det A \neq 0$.
    - czemu?

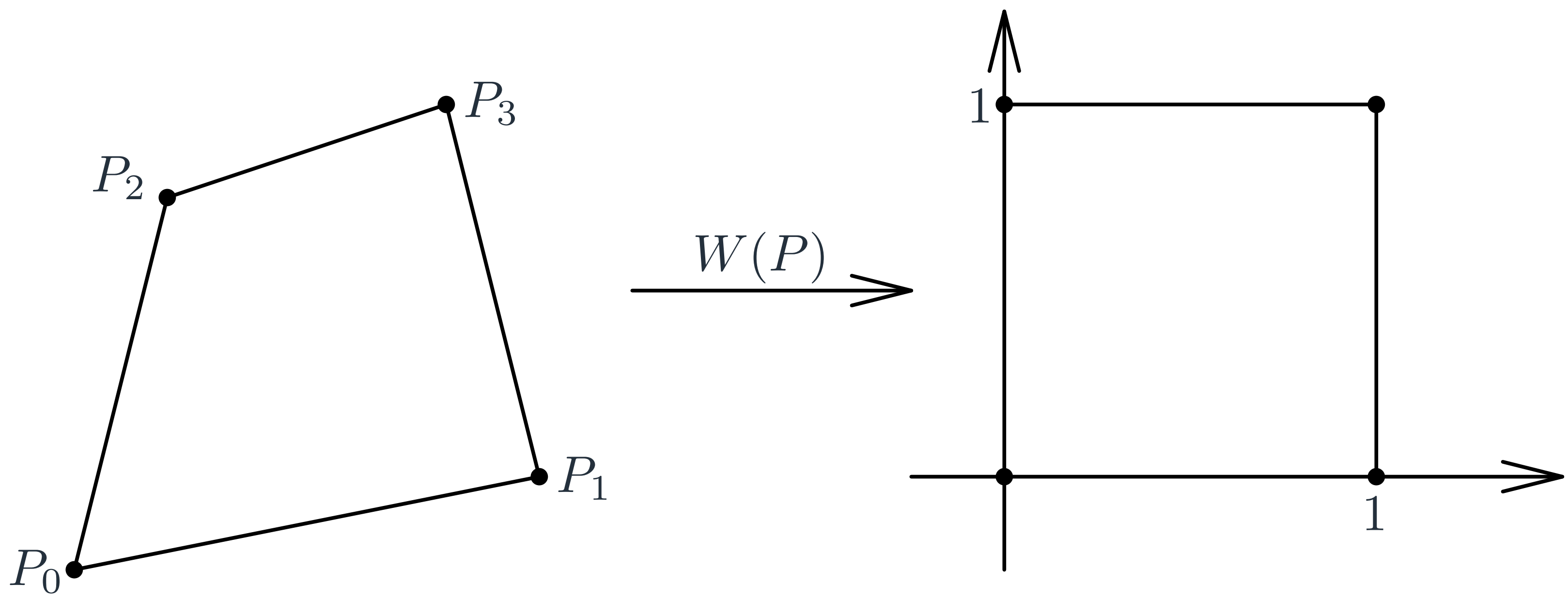
Transformacja po czterech punktach

- Dane są dwie czwórki punktów na płaszczyźnie:
  $P = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ oraz $Q = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$.
  - $P_j = (x_0, y_j)$, $Q_j = (s_j, t_j)$, $j = 0, \ldots, 3$.
- Znaleźć taką transformację perspektywiczną $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, że $A(P_j) = Q_j$, $j = 0, \ldots, 3$.

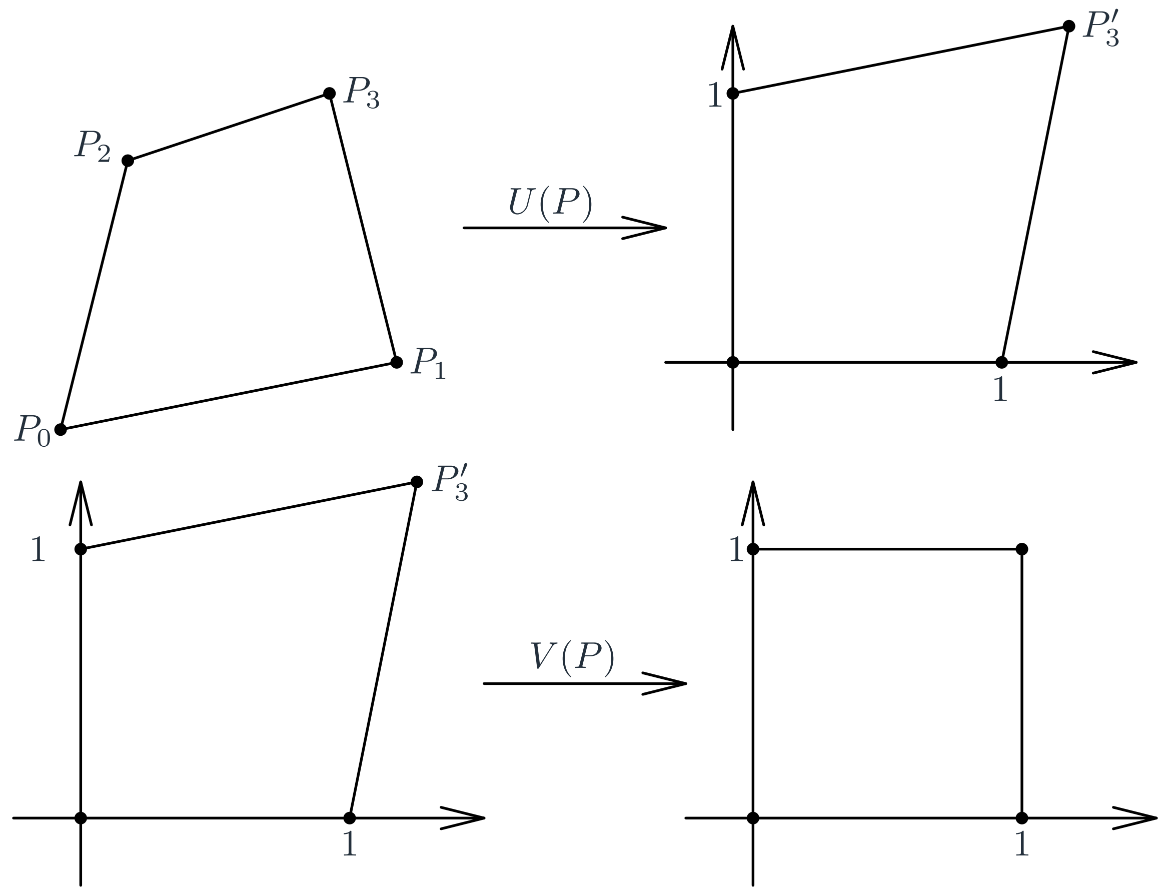


- Rozwiązywanie jednorodnego układu równań liniowych
  - 12 równań
  - 13 zmiennych

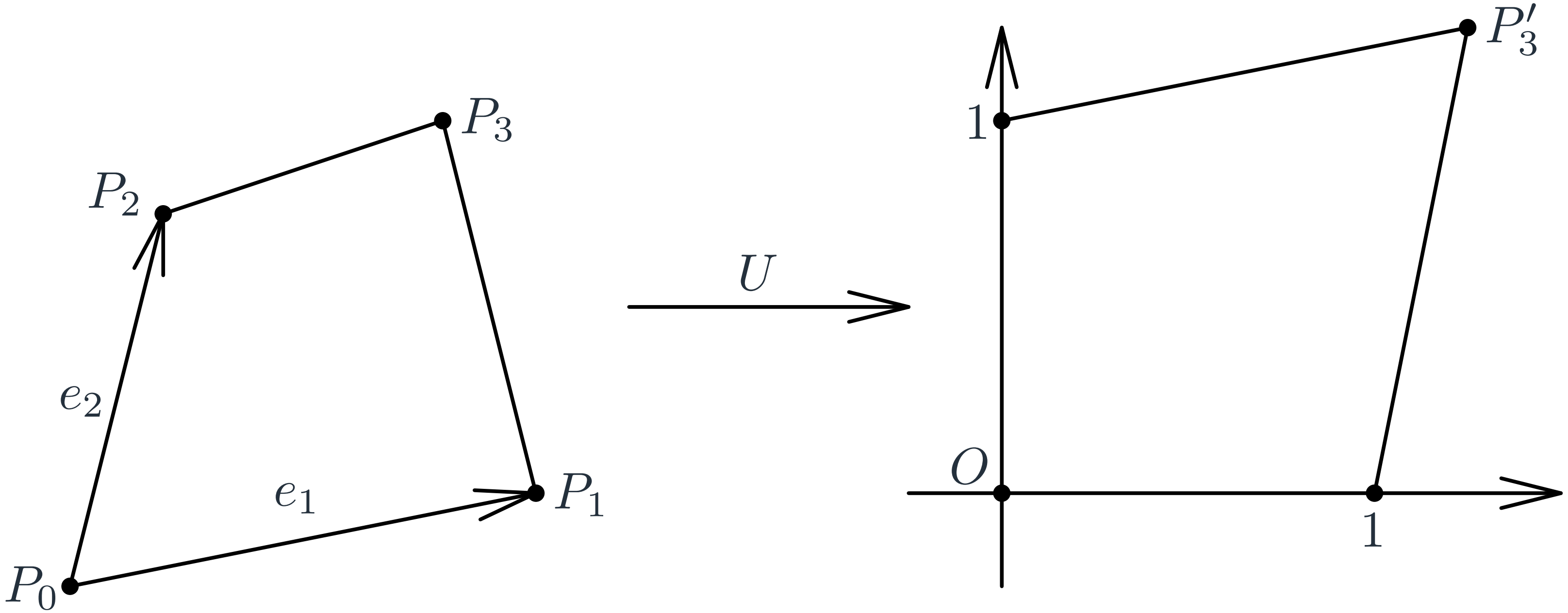
- Przekształcenie pomocnicze $W(P) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
  - $A = (W(Q))^{-1} W(P)$



- Rozkładamy W w iloczyn $W(P) = V(P)U(P)$, gdzie
  - $U(P)$ będzie przekształceniem afinicznym,
  - $V(P)$ — rzutowym.



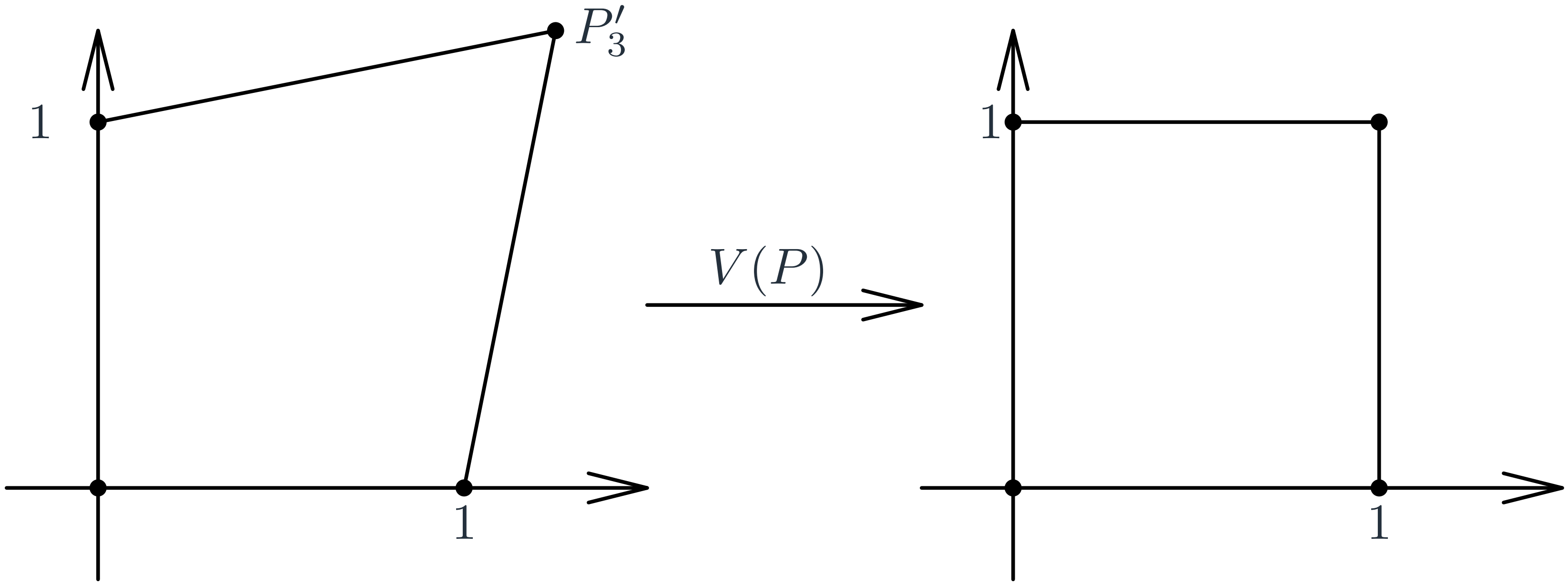
- Przekształcenie U to zamiana standardowego układu współrzędnych (O, i, j) na (P_0, e_1, e_2).



- $\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 \\ dy_1 & dy_2 \end{pmatrix}$, gdzie
  - $dx_k = x_k - x_0$, $dy_k = y_k - y_0$, $k = 1, 2, 3$.
- $\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} dy_2 & -dx_2 \\ -dy_1 & dx_1 \end{pmatrix}$, gdzie
  - $\Delta = \det M = dx_1 dy_2 - dy_1 dx_2$.
- W szczególności, $\overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$, gdzie
  - $x'_0 = (x_0 dy_2 - y_0 dx_2)/\Delta$,
  - $y'_0 = (-x_0 dy_1 + y_0 dx_1)/\Delta$.
- Więc $U : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M^{-1} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$

- $U = \begin{pmatrix} \frac{dy_2}{\Delta} & -\frac{dx_2}{\Delta} & \frac{-x_0 dy_2 + y_0 dx_2}{\Delta} \\ -\frac{dy_1}{\Delta} & \frac{dx_1}{\Delta} & \frac{x_0 dy_1 - y_0 dx_1}{\Delta} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
  - W szczególności, $P_3 \mapsto \begin{pmatrix} x'_3 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} dx_3 dy_2 - dy_3 dx_2 \\ -dx_3 dy_1 + dy_3 dx_1 \end{pmatrix}$
- Przekształcenie odwrotne $U^{-1} = \begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 & +x_0 \\ dy_1 & dy_2 & +y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Stosowanie współrzędnych jednorodnych pozwala zamienić U na prostszą macierz:
  $\begin{pmatrix} dy_2 & -dx_2 & -x_0 dy_2 + y_0 dx_2 \\ -dy_1 & dx_1 & x_0 dy_1 - y_0 dx_1 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}.$

- $P_3' = (x_3', y_3')$, określone na slajdzie 22



Równania na macierz V

- $(0,0) \mapsto (0,0)$:
  - $a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{33} = 1$.
- $(1,0) \mapsto (1,0)$:
  - $a_{11} = \lambda_1$, $a_{21} = 0$, $a_{31} + 1 = \lambda_1$.
    - $a_{31} = a_{11} - 1$.
- $(1,0) \mapsto (1,0)$:
  - $a_{12} = 0$, $a_{22} = \lambda_2$, $a_{32} + 1 = \lambda_2$.
    - $a_{32} = a_{22} - 1$.
- $P_3' \mapsto (1,1)$
  - $a_{11}x_3' = \lambda, \quad a_{22}y_3' = \lambda, \quad -x_3' - y_3' + 1 = -\lambda.$

- Rozwiązanie równań: $\begin{pmatrix} \frac{x'_3+y'_3-1}{x'_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x'_3+y'_3-1}{y'_3} & 0 \\ \frac{y'_3-1}{x'_3} & \frac{x'_3-1}{y'_3} & 1 \end{pmatrix}$
- Inna postać macierzy V:

$$\begin{pmatrix} \frac{\begin{vmatrix} x_2-x_3 & y_2-y_3 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3-x_0 & y_3-y_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 \end{vmatrix}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\begin{vmatrix} x_2-x_3 & y_2-y_3 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 \end{vmatrix}} & 0 \\ \frac{\begin{vmatrix} x_2-x_3 & y_2-y_3 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3-x_0 & y_3-y_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 \end{vmatrix}} & \frac{\begin{vmatrix} x_2-x_0 & y_2-y_0 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 \end{vmatrix}} & 1 \end{pmatrix}$$

- $V^t = TS$, gdzie S jest skalowaniem, a T — przesunięciem równoległym
- $(V^t)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$
- $V^{-1} = \left((V^t)^{-1}\right)^t = (S^{-1}T^{-1})^t$
- $V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x'_3}{x'_3+y'_3-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y'_3}{x'_3+y'_3-1} & 0 \\ \frac{1-y'_3}{x'_3+y'_3-1} & \frac{1-x'_3}{x'_3+y'_3-1} & 1 \end{pmatrix} \sim$
  $\begin{pmatrix} x'_3 & 0 & 0 \\ 0 & y'_3 & 0 \\ 1-y'_3 & 1-x'_3 & x'_3+y'_3-1 \end{pmatrix}$

- $P_j = (x_j, y_j)$, $Q_j = (s_j, t_j)$, $j = 0, \ldots, 3$

1. $dx_j = x_j - x_0$, $dy_j = y_j - y_0$, $j = 1, 2, 3$
2. $\Delta_p = dx_1 dy_2 - dy_1 dx_2$
3. $x'_3 = \frac{dx_3 dy_2 - dy_3 dx_2}{\Delta_p}$, $y'_3 = \frac{-dx_3 dy_1 + dy_3 dx_1}{\Delta_p}$
4. $U(P) = \begin{pmatrix} dy_2 & -dx_2 & -x_0 dy_2 + y_0 dx_2 \\ -dy_1 & dx_1 & x_0 dy_1 - y_0 dx_1 \\ 0 & 0 & \Delta_p \end{pmatrix}$
5. $V(P) = \begin{pmatrix} \frac{x'_3 + y'_3 - 1}{x'_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x'_3 + y'_3 - 1}{y'_3} & 0 \\ \frac{y'_3 - 1}{x'_3} & \frac{x'_3 - 1}{y'_3} & 1 \end{pmatrix}$

Algorytm obliczenia przekształcenia, cd

6. $ds_j = s_j - s_0,\ dt_j = t_j - t_0,\ j = 1, 2, 3$
7. $\Delta_q = ds_1 dt_2 - dt_1 ds_2$
8. $s'_3 = \frac{ds_3 dt_2 - dt_3 ds_2}{\Delta_q},\ t'_3 = \frac{-ds_3 dt_1 + dt_3 ds_1}{\Delta_q}$
9. $V^{-1}(Q) = \begin{pmatrix} s'_3 & 0 & 0 \\ 0 & t'_3 & 0 \\ 1 - t'_3 & 1 - s'_3 & t'_3 + s'_3 - 1 \end{pmatrix}$
10. $U^{-1}(Q) = \begin{pmatrix} ds_1 & ds_2 & +s_0 \\ dt_1 & dt_2 & +t_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
11. $A = U^{-1}(Q) V^{-1}(Q) V(P) U(P)$
12. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda s \\ \lambda t \\ \lambda \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$

- Jeżeli punkty P tworzą kwadrat $[0,1] \times [0,1]$, to
  - $U(P) = V(P) = I$
  - $A = U^{-1}(Q)V^{-1}(Q)$
- Jeżeli punkty Q tworzą kwadrat $[0,1] \times [0,1]$, to
  - $U^{-1}(Q) = V^{-1}(Q) = I$
  - $A = V(P)U(P)$

Przekształcenia nieliniowe

- $(x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$

- We współrzędnych biegunowych $(r, \phi) \mapsto (cr^k, \phi)$, gdzie $c > 0$ jest stałą, k nazywa się stopniem implozji
  - $k > 0$ — implozja
  - $k < 0$ — eksplozja
- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$
  - $\cos\phi = \frac{x}{r}$, $\sin\phi = \frac{y}{r}$
- Zazwyczaj obraz przeskalowuje się na kwadrat $[0, 1] \times [0, 1]$

Przykład

$k = 0{,}75$

$k = -0{,}75$