# Przetwarzanie i Kompresja Obrazów. Analiza Fouriera

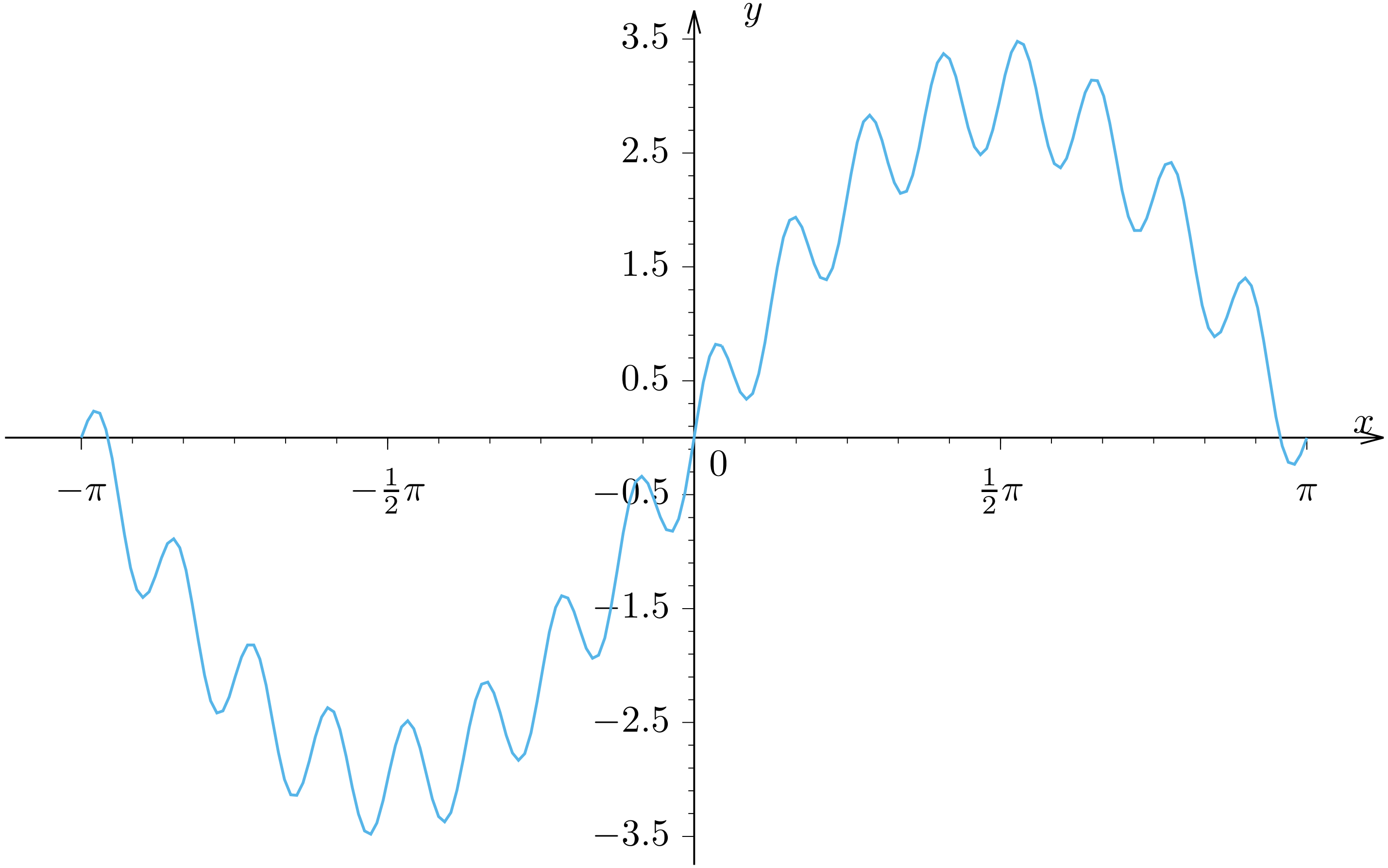
Aleksander Denisiuk (denisjuk@pja.edu.pl)
Polsko-Japońska Akademia Technik Komputerowych
Wydział Informatyki w Gdańsku
ul. Brzegi 55, 80-045 Gdańsk

1 maja 2016

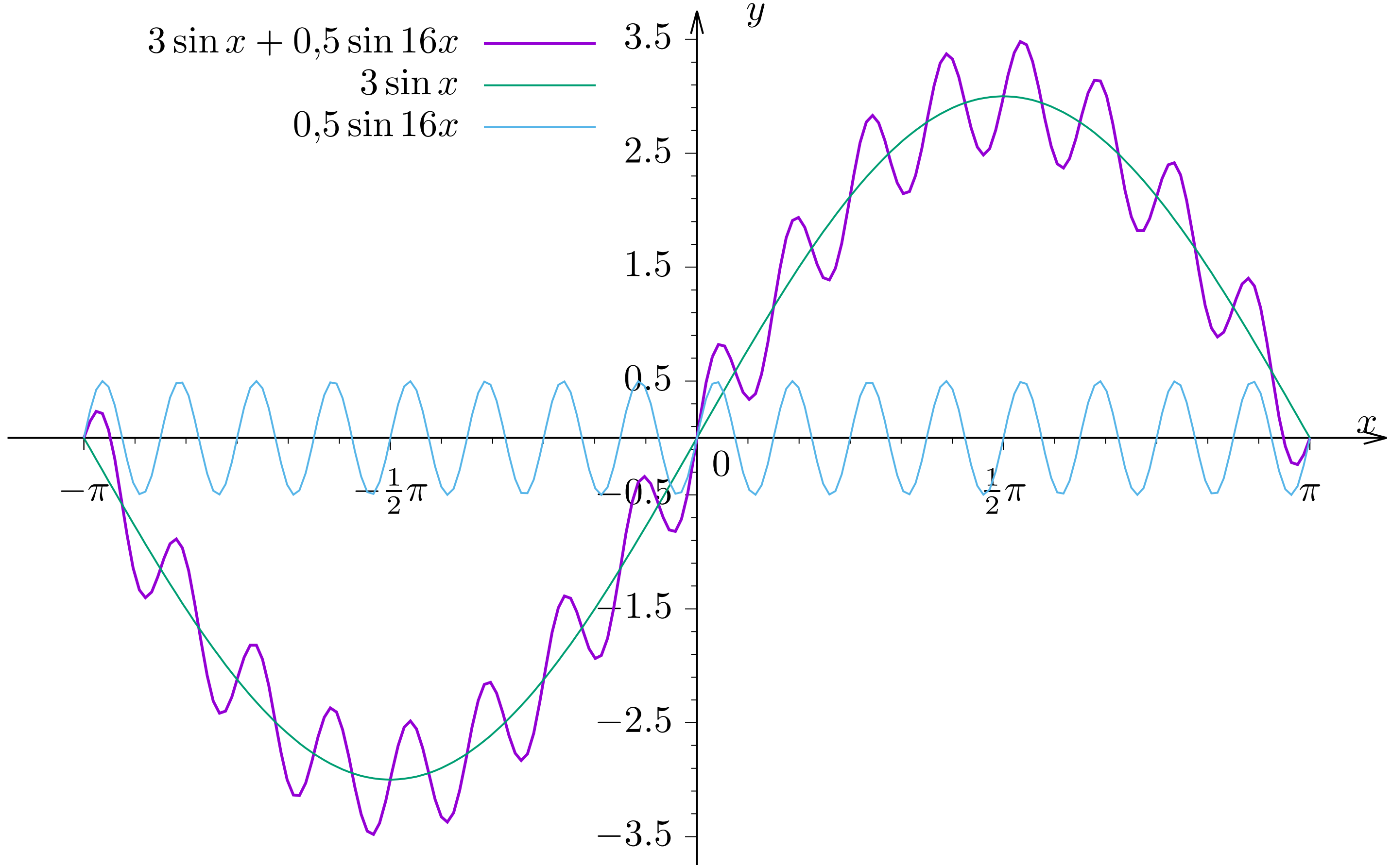
Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem
http://users.pja.edu.pl/~denisjuk/

# Szeregi Fouriera

- Rozmowa telefoniczna
- Sygnał:

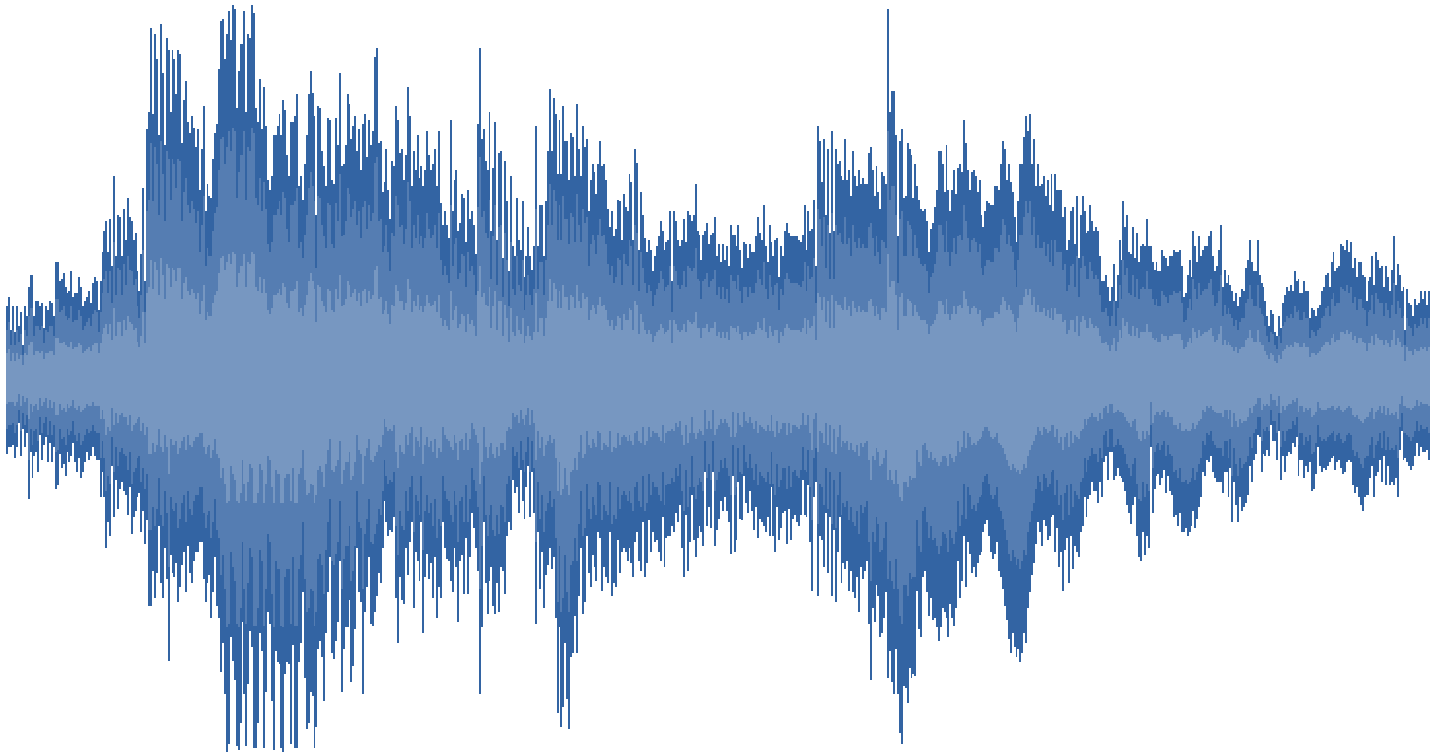


- $3\sin x + 0{,}5\sin 16x$




- Jak najlepiej transmitować ten sygnał?
- Jak można ten sygnał skompresować?

# Prawdziwy Sygnał



- Wymaga nieskończenie wiele „funkcji elementarnych”:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin nt + c_n \cos nt$$

- Dana jest okresowa funkcja $f(t)$, $t \in [-\pi, \pi]$
  - funkcja, określona na okręgu
- Szereg Fouriera funkcji $f$

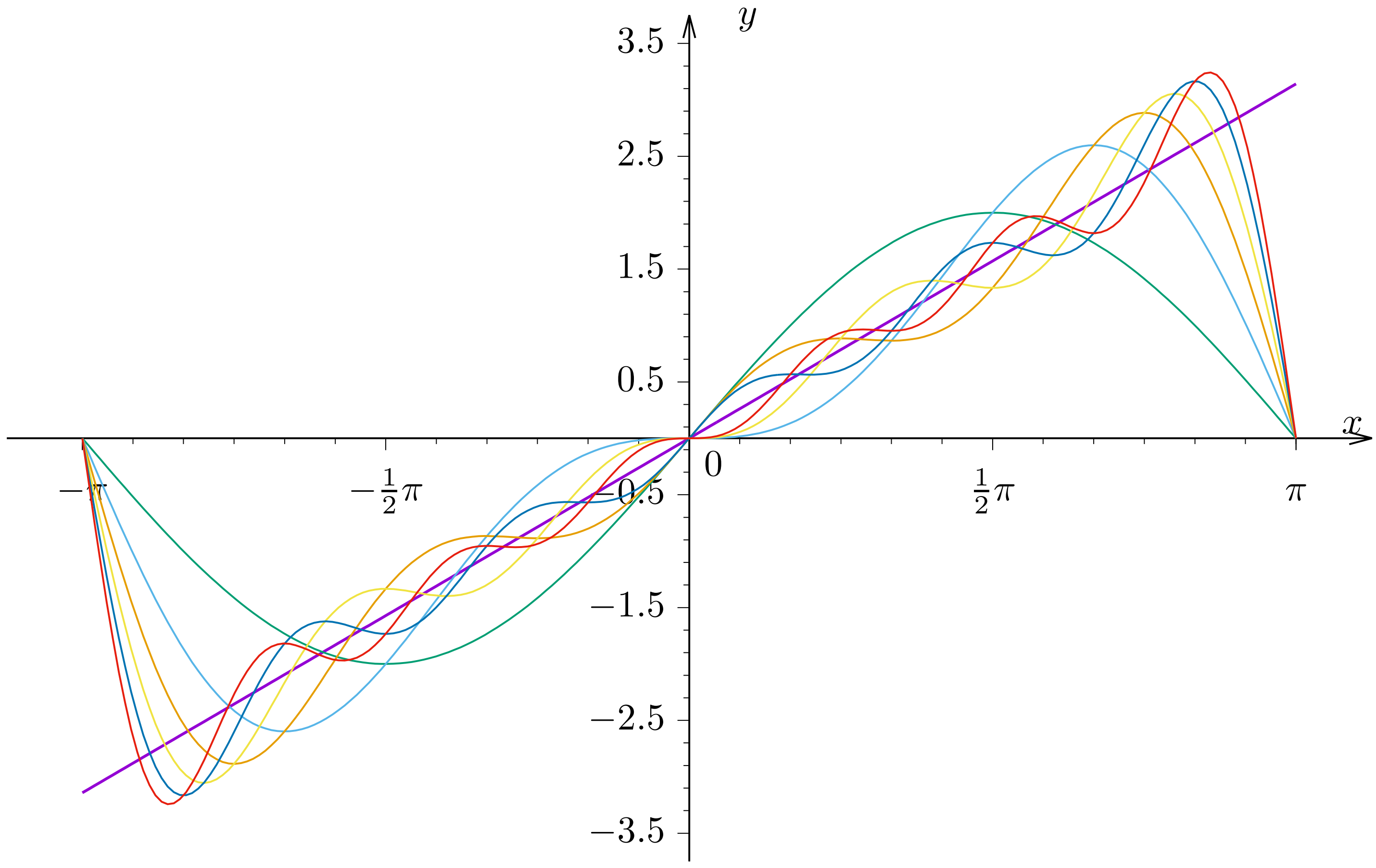
$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin nt + c_n \cos nt$$

- Szereg w postaci wykładniczej
  - $\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2i}$
  - $\sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$
  - $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$

$$a_n = \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx$$

- $f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{nt}$

- $f(t) = t$



- $f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi int}$
- $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi inx}\, dx$
- Odwzorowania:

1. $f(t) \mapsto \hat{f}(n)$
2. $\hat{f}(n) \mapsto f(t)$

# Właściwości współczynników Fouriera

- Liniowość: $\alpha f(t) + \beta g(t) \mapsto \alpha \hat{f}(n) + \beta \hat{g}(n)$
- Przesunięcie (cykliczne) w domenie fizycznej $f(x-a) \mapsto \hat{f}(n) e^{-2\pi i\, an}$
- Przesunięcie w domenie widmowej $f(x)e^{2\pi i\, lx} \mapsto \hat{f}(n-l)$
- Jeżeli szereg jest zbieżny, to $\hat{f}(n) \to 0$
- Różniczkowanie: $f'(x) \mapsto 2\pi i n \hat{f}(n)$
- Splot (cykliczny) funkcji (filtracja)
  $f * g(t) = \int\limits_0^1 f(x) g(t-x)\, dx$

$$f * g \mapsto \hat{f}(n)\hat{g}(n)$$

- Twierdzenie Parsevala: $\int\limits_0^1 |f(t)|^2\, dt = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$

# Transformacja Fouriera

- Dana jest funkcja $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$
- Odwzorowania:

1. $f(x) \mapsto \hat{f}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi}\, dx$
2. $\hat{f}(\xi) \mapsto f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi}\, d\xi$

- Liniowość: $\alpha f(t) + \beta g(t) \mapsto \alpha \hat{f}(\xi) + \beta \hat{g}(\xi)$
- Przesunięcie w domenie fizycznej $f(x-a) \mapsto \hat{f}(\xi)e^{2\pi i a \xi}$
- Przesunięcie w domenie widmowej $f(x)e^{-2\pi i\, ax} \mapsto \hat{f}(\xi - a)$
- Różniczkowanie: $f'(x) \mapsto 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$
- Splot funkcji (filtracja) $f * g(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(t-x)\, dx$

$$f * g \mapsto \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$$

- Twierdzenie Parsevala: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi$

# Dyskretna Transformacja Fouriera

- Dyskretyzacja szeregu Fouriera
  - $f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n t} \approx \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(n) e^{2\pi i n t}$
  - $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i x}\, dx \approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k/N) e^{-2\pi i \frac{kn}{N}}$
- Dyskretna transformacja Fouriera
  - dany jest ciąg $a_0, \ldots, a_{N-1}$
  - DTF to jest ciąg $\hat{a}_0, \ldots, \hat{a}_{N-1}$, gdzie

    $$\hat{a}_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-2\pi i \frac{kn}{N}}$$
  - transformacja odwrotna: $a_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{a}_n e^{2\pi i \frac{nk}{N}}$

- Liniowość: $\alpha a_n + \beta b_n \mapsto \alpha \hat{a}_n + \beta \hat{b}_n$
- Przesunięcie (cykliczne) w domenie fizycznej $a_{n-l} \mapsto \hat{a}_n e^{-2\pi i \frac{nl}{N}}$
- Przesunięcie (cykliczne) w domenie widmowej $a_n e^{2\pi i \frac{nl}{N}} \mapsto \hat{a}_{n-l}$
- Splot ciągów (filtracja) $a_n * b_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k b_{k-n}$

$$a_n * b_n \mapsto \hat{a}_n \hat{b}_n$$

- Twierdzenie Parsevala: $\sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |\hat{a}_n|^2$

# DTF jako przekształcenie liniowe

- $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
- Macierz przekształcenia: $a \mapsto \frac{1}{\sqrt{N}} Fa$, gdzie macierz Fouriera

$$F_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \dots & \omega^{3(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix},$$

  $\omega = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$ jest pierwiastkiem z jedynki
- Przekształcenie odwrotne, $\mathcal{F}^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ma macierz o współczynnikach sprzężonych
  - $F_N^{-1} = \overline{F}_N$
- Przykład: $N = 1, 2, 4, 8$

- $n \log_2 n$ działań
- Dla $n = 4$:

$$F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\hat{a}_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} a_{2n} e^{-2\pi i \frac{mn}{N/2}} + \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} a_{2n+1} e^{-2\pi i \frac{mn}{N/2}}$
- $\hat{a}_{m+\frac{N}{2}} =$
$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} a_{2n} e^{-2\pi i \frac{mn}{N/2}} - \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} a_{2n+1} e^{-2\pi i \frac{mn}{N/2}}$
- $F_N = D_1^N B_1^N S_1^N$, gdzie

$$D_1^N = \begin{pmatrix} I_{\frac{N}{2}} & D_{\frac{N}{2}} \\ I_{\frac{N}{2}} & -D_{\frac{N}{2}} \end{pmatrix}, \quad B_1^N = \begin{pmatrix} F_{\frac{N}{2}} & 0_{\frac{N}{2}} \\ 0_{\frac{N}{2}} & F_{\frac{N}{2}} \end{pmatrix}, \quad S_1^N = \begin{pmatrix} \mathrm{Even}_{\frac{N}{2}} \\ \mathrm{Odd}_{\frac{N}{2}} \end{pmatrix}$$

- etc. . .
- Jeżeli $N$ nie jest potęgą dwójki, to ciąg uzupełnia się zerami

- Splot $a_n * b_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k b_{n-k}$ jest mnożeniem przez macierz, $N^2$ działań
- Z zastosowaniem FFT trzeba tylko $N \log_2 N$ działań
  - $a_n \mapsto \hat{a}_n = \mathcal{F} a_n$
  - $b_n \mapsto \hat{b}_n = \mathcal{F} b_n$
  - $\hat{a}_n, \hat{b}_n \mapsto \hat{c}_n = \hat{a}_n \hat{b}_n$
  - $\hat{c}_n \mapsto a_n * b_n = \mathcal{F}^{-1} c_n$

# Dwuwymiarowa Transformacja Fouriera

- Dana jest tablica $a_{m,n}$, $m = 1, \ldots, M-1$ $n = 1, \ldots, N-1$
- DTF to jest tablica $\hat{a}_{m,n}$, $m = 1, \ldots, M-1$ $n = 1, \ldots, N-1$, gdzie
  $\hat{a}_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} a_{k,l} e^{-2\pi i \frac{km}{M}} e^{-2\pi i \frac{ln}{N}}$
- Fransformacja odwrotna:
  $a_{k,l} = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{a}_{m,n} e^{2\pi i \frac{km}{M}} e^{-2\pi i \frac{ln}{N}}$

- Rozdzialczość: $\mathcal{F}_2(a_{m,n}) = \mathcal{F}_1\mathcal{F}_2(a_{m,n})$
- Liniowość: $\alpha a_{m,n} + \beta b_{m.n} \mapsto \alpha\hat{a}_{m,n} + \beta\hat{b}_{m,n}$
- Przesunięcie (cykliczne) w domenie fizycznej $a_{m-k,n-l} \mapsto \hat{a}_{m,n} e^{-2\pi i\frac{mk}{N}} e^{-2\pi i\frac{nl}{N}}$
- Przesunięcie (cykliczne) w domenie widmowej $a_{m,n} e^{2\pi i\frac{mk}{M}} e^{2\pi i\frac{nl}{N}} \mapsto \hat{a}_{m-k,n-l}$
- Splot ciągów (filtracja) $a_{m,n} * b_{m,n} = \sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1} a_{k,l} b_{k-m,l-n}$

$$a_{m,n} * b_{m,n} \mapsto \hat{a}_{m,n}\hat{b}_{m,n}$$

- Twierdzenie Parsevala: $\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} |a_{m.n}|^2 = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} |\hat{a}_{m,n}|^2$

# Transformacja Kosinusowa

# Szereg Fouriera funkcji parzystej



- Dana jest parzysta okresowa funkcja $f(t)$, $t \in [-\pi, \pi]$
- $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$
- $\hat{f}(-n) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx}\, dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$
- $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int} = \hat{f}(0) + 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) \cos nt$
- Szereg kosinusowy:
  - $f(t) \mapsto \bar{f}(n) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$, $n = 0, 1, \ldots$
  - $\bar{f}(n) \mapsto \frac{1}{2} \bar{f}(0) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \bar{f}(n) \cos nt$

- Dyskretyzacja szeregu kosinuswego
- Dany jest ciąg $a_0, \ldots, a_{N-1}$
- Dyskretną trasnformacją kosinusową jest ciąg $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{N-1}$, gdzie
  - $\bar{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} a_n$
  - $\bar{a}_n = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} a_n \cos \frac{\pi n(2k+1)}{2N}$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$
- Odwrócenie:
  - $a_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \bar{a}_0 + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^{N-1} \bar{a}_k \cos \frac{\pi k(2n+1)}{2N}$,
    $n = 0, 1, \ldots, N-1$

# Dwuwymiarowa dyskretna trasnformacja kosinusowa

- Dana jest tablica $a_{m,n}$, $m, n = 0, \ldots, N-1$
- Dyskretną trasnformacją kosinusową jest tablica $\bar{a}_{m,n}$, $m, n = 0 \ldots, N-1$, gdzie
  - $\bar{a}_{0,0} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} a_{k,l}$
  - $\bar{a}_{0,n} = \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} a_{k,l} \cos \frac{\pi n(2l+1)}{2N}$
  - $\bar{a}_{m,0} = \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} a_{k,l} \cos \frac{\pi m(2k+1)}{2N}$
  - $\bar{a}_{m,n} = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} a_{k,l} \cos \frac{\pi m(2k+1)}{2N} \cos \frac{\pi n(2l+1)}{2N}$

# Odwrócenie 2D DCT

$$
\begin{aligned}
a_{m,n} =& \frac{1}{\sqrt{N}}\bar{a}_{0,0} + \frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{l=1}^{N-1}\bar{a}_{0,l}\cos\frac{\pi l(2n+1)}{2N} \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\bar{a}_{k,0}\cos\frac{\pi k(2m+1)}{2N} \\
&+ \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{l=1}^{N-1}\bar{a}_{k,l}\cos\frac{\pi k(2m+1)}{2N}\cos\frac{\pi l(2n+1)}{2N}
\end{aligned}
$$