20. Punkty D i E leżą na bokach odpowiednio AC i BC trójkąta ABC. Odcinek DE równoległy do boku AB jest 3 razy krótszy od boku AB. Wynika stąd, że:

a) Pole powierzchni trójkąta DEC jest 9 razy mniejsze od pola powierzchni trójkąta ABC.

b) W trapez $ABCD$ można wpisać okrąg.

c) $|AE| + |BD| > |AB| + |DE|$.

21. Stosunek długości promienia okręgu opisanego do promieniu okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny wynosi $5 : 2$. Wynika stąd, że sinus kąta ostrego tego trójkąta może być równy

a) 0,6.

b) 0,2.

c) 0,8.

22. Przez punkt $C(0, 0)$ przechodzą proste styczne do okręgu $(x-1)^2+(y-3)^2 = 1$ w punktach A i B.

a) Trójkąt ABC jest równoramienny.

b) Trójkąt ABC jest równoboczny.

c) Pole powierzchni trójkąta ABC jest mniejsze od 3.

23. Ze zbioru liczb całkowitych należących do przedziału $\langle -3, 2\rangle$ losujemy dwa razy (bez zwracania) jedną liczbę. Niech A oznacza zdarzenie *suma wylosowanych liczb jest ujemna,* B — zdarzenie *iloczyn wylosowanych liczb jest ujemny.*

a) $P(A) \leqslant P(B)$.

b) Zdarzenia A i B są niezależne.

c) $P(A|B) \geqslant P(B)$.

24. Niech A i B będą niezależnymi zdarzeniami losowymi takimi, że $0 < P(A) < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < P(B) < 1$. Wynika stąd, że

a) Zdarzenia A' i B są niezależne.

b) $P(B - A) > \frac{1}{4}$.

c) $P(A - B) = 0$.

25. Ze zbioru punktów $\{ Q_1, Q_2, \ldots, Q_6 \}$ będących wierzchołkami sześciokąta foremnego o boku długości 1 losujemy dwa punkty Q_i, Q_k bez zwracania. Niech A oznacza zdarzenie: *długość odcinka* $\overline{Q_iQ_k}$ *jest liczbą wymierną,* a B — zdarzenie: *odcinek* $\overline{Q_iQ_k}$ *jest bokiem sześciokąta.*

a) $P(A) \leqslant \frac{1}{2}$.

b) $P(B) \leqslant P(A)$.

c) $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$.

Zestaw B

1. Dany jest układ równań:

$$\begin{cases} xy = a, \\ x^2 + y^2 = 8, \end{cases}$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$.

a) Dla $a = 0$ układ ma co najmniej jedno rozwiązanie.

b) Dla każdego $a \neq 0$ układ ma cztery różne rozwiązania.

c) Istnieje taka liczba $a \in \mathbb{R}$, że wszystkie rozwiązania układu leżą na jednej prostej.

2. Niech $A_m = \{ (x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge (x - m)^2 + y^2 \leqslant 1 \wedge y \leqslant x \}$, gdzie $m \in \mathbb{R}$.

a) $A_1 \subset A_2$.

b) $A_1 \cap A_{-1} = \emptyset$.

c) Istnieje takie $m \in \mathbb{R}$, że pole powierzchni figury A_m jest równe $\frac{1}{2}\pi$.

3. Niech $A_m \in \mathbb{N}$ oznacza zbiór wszystkich liczb podzielnych przez liczbę naturalną m, a B oznacza zbiór wszystkich liczb, będących iloczynem trzech kolejnych liczb naturalnych

a) $A_6 \setminus A_3 = A_2$.

b) $B \subset A_3$.

c) $A_2 \cap B = B$.

4. Dane jest równanie $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \frac{2x}{x+1} = 3$.

a) Równanie ma dwa różne pierwiastki.

b) Istnieje ujemny pierwiastek równania.

c) Istnieje $\alpha \in (0, \pi)$ takie, że $\cos\alpha$ jest pierwiastkiem tego równania.

5. Niech (x, y) oznacza dowolną parę liczb naturalnych, spełniających układ równań

$$\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7, \\ x^y = 5^{12}. \end{cases}$$

a) Obie liczby x i y są parzyste.

b) Suma liczb x i y jest parzysta.

c) $\log_5 x \log_5 y > 3$.

6. Dany jest ciąg $a_n = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Ciąg a_n jest ciągiem monotonicznym.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

c) $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 100a_{100} = 50$.

7. Niech a_n, gdzie $n \in \mathbb{N}$ będzie takim nieskończonym ciągiem geometrycznym o wyrazach ujemnych, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

a) ciąg a_n jest rosnący.

b) Istnieje skończona suma wszystkich wyrazów tego ciągu.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{2n}} = 0$.

8. Niech $S_n(x) = (2x-5) + (2x-5)^2 + \cdots + (2x-5)^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Istnieje skończona granica $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (2,3)$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(\sqrt{5})$ jest liczbą ujemną.

c) Równanie $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = -1/x$ ma co najmniej jeden pierwiastek.

9. Niech p_n, gdzie $n \in \mathbb{N}$ oznacza pole trójkąta o wierzchołkach w punktach $(0,0)$, $(\frac{1}{2^{n-1}}, 0)$, $(\frac{1}{2^n}, 3)$.

a) Ciąg $\frac{p_{n+2}}{p_n}$ jest stały.

b) $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots \geqslant 3$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n p_n = \frac{3}{2}$.

10. Dana jest funkcja $f(x) = 9^x + 2 \cdot 3^x - 3$.

a) Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \geqslant -4$.

b) Funkcja $f(x)$ ma dwa miejsca zerowe.

c) Wykres funkcji f ma asymptotę poziomą.

11. Dane są funkcje $f(x) = \log_2(x^2 - 1)$ oraz $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

a) Dziedziny funkcji f i g są równe

b) Zbiór wartości funkcji g zawiera się w zbiorze wartości funkcji f.

c) W przedziale $(1, \infty)$ funkcja f rośnie.

12. Dana jest funkcja $f(x) : \langle -\frac{1}{2}\pi, 2\pi \rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^2 x - \frac{1}{2}\cos x$.

a) Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$.

b) $f'(\pi) = -2$.

c) Funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie $x = 0$.

13. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$ oraz $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$. Wynika stąd, że:

a) funkcja f jest ograniczona z góry,

b) funkcja f jest rosnąca w $(-\infty, \infty)$,

c) prosta $y = 3x - 2$ jest asymptotą wykresu funkcji f w $+\infty$.

14. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oznacza dowolną ciągłą funkcję parzystą która jest malejąca w przedziale $(5, +\infty)$. Wynika stąd, że:

a) $f(9) > f(-6)$,

b) funkcja f jest ograniczona z góry,

c) w przedziale $(-\infty, -5)$ funkcja $g(x) = -f(x)$ maleje.

15. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{a+x}{x-1}$, gdzie $a \neq -1$.

a) $f'(4) < 0$ dla każdego $a > -1$.

b) Dla każdego $a \neq -1$ istnieje styczna do wykresu funkcji f równoległa do prostej $2x + 3y = 0$.

c) Istnieje $a \neq -1$ takie, że funkcja f ma ekstremum lokalne.

16. Niech $w(x)$ będzie dowolnym wielomianem stopnia $n \in \mathbb{N}$. Wówczas:

a) dla $n = 3$ $w(x)$ ma tyle samo maksimów i minimów lokalnych,

b) dla $n = 4$ liczba maksimów lokalnych $w(x)$ jest różna od liczby minimów lokalnych $w(x)$,

c) jeśli n jest liczbą podzielną przez trzy, to $w(x)$ ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

17. Niech $p(x)$ oznacza pole powierzchni trójkąta ABC takiego, że $A(0, -2)$, $B(\frac{\pi}{2}, -2)$, $C(x, \sin x)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

a) Funkcja $p(x)$ ma nieskończenie wiele ekstremów lokalnych.

b) Funkcja $p(x)$ jest malejąca w przedziale $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{p(x)}{x} = 0$.

18. Dany jest taki trójkąt równoramienny ABC, że $\angle ABC = \frac{1}{2}\pi$. Przez wierzchołek B oraz środki boków AB i BC poprowadzono okrąg ρ.

a) Środek boku AC należy do okręgu ρ.

b) Środek okręgu ρ jest jednocześnie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

c) Obwód okręgu ρ jest większy od obwodu trójkąta ABC.

19. W okrąg o promieniu R wpisano trójkąt równoramienny ABC, którego podstawa AB ma długość $\frac{1}{3}R$, a środek okręgu leży wewnątrz trójkąta.

a) $|AC| = \sqrt{2}R$.

b) Odległość punktu C od podstawy AB jest równa $\frac{4}{3}R$.

c) $\angle ABC = 30°$.