19. W rombie $ABCD$ o boku długości c stosunek długości przekątnych jest równy $3:4$.

a) Tangens kąta ostrego rombu jest równy $\frac{24}{7}$.

b) Pole powierzchni rombu jest większe od $\frac{4}{5}c^2$.

c) Długość promienia okręgu wpisanego w romb jest większa od $\frac{1}{2}c$.

20. Wybieramy dowolny punkt leżący wewnątrz trójkąta równobocznego o boku długości a. Niech x, y, z oznaczają odległości wybranego punktu od wierzchołków trójkąta. Wynika stąd, że:

a) $x+y+z=2a$,

b) $xyz=\frac{1}{3}a^3$,

c) $x^2+y^2+z^2=a^2$.

21. Dana jest funkcja $f(x)=|\log_{\frac{1}{3}}(x-3)|$ dla $x>3$.

a) Funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe.

b) W przedziale $(3,4)$ funkcja f maleje.

c) Istnieje taka liczba naturalna n, że równanie $f(x)=n$ ma dokładnie n rozwiązań.

22. Dane są punkty $A(3,-6)$, $B(-3,6)$ oraz $C(2a,a)$, gdzie $a\neq 0$.

a) Dla każdego $a\neq 0$ trójkąt ABC jest równoramienny.

b) Dla każdego $a\in(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$ trójkąt ABC jest ostrokątny.

c) Istnieje takie $a\neq 0$, że $3\sin\angle ABC=\sin\angle ACB$.

23. Jeśli zdarzenia $A,B,C\subset\Omega$ spełniają warunki: $P(A\cap B)>0$, $A\cap B\subset C$ oraz $P(C)\neq 1$, to

a) zdarzenia $A\cap B$ oraz C' są niezależne,

b) $P(A'\cup B')\geqslant P(C')$,

c) $P(A\cup C)\leqslant P(A)+P(C)-P(A\cap B)$.

24. Ze zbioru $Z=\{\,(x,y): x\in\mathbb{N}\wedge x<100\wedge y<100\,\}$ wybieramy losowo punkt (a_1,a_2). Niech B oznacza zdarzenie: $a_1\cdot a_2$ *jest liczbą parzystą*, a D — zdarzenie a_1+a_2 *jest liczbą nieparzystą.*

a) $P(B)\geqslant P(D)$.

b) Zdarzenia B i D są rozłączne.

c) Zdarzenia B i D są niezależne.

25. Rzucamy 6 razy monetą symetryczną. Niech A oznacza zdarzenie: *co najmniej 3 razy wypadł orzeł,* B — zdarzenie: *co najwyżej 2 razy wypadła reszka.*

a) $A\subset B$.

b) $P(A)=\frac{21}{32}$.

c) $P(A\cup B)>\frac{5}{6}$.

Zestaw A

1. Dany jest układ równań (o niewiadomych x i y):

$$\begin{cases}(|x|-1)(|y|-b)=0,\\ x^2+y^2=a^2,\end{cases}$$

gdzie $a,b\in\mathbb{R}$.

a) Istnieje taka para liczb a i b, że układ nie ma rozwiązań.

b) Istnieje taka para liczb a i b, że układ ma więcej niż cztery rozwiązania.

c) Istnieje taka para liczb a i b, że wszystkie rozwiązania układu są wierzchołkami kwadratu.

2. Niech A będzie zbiorem takich punktów (x,y) płaszczyzny, że $y-1\geqslant\sqrt{x^2+y^2-1}$.

a) Zbiór A jest niepusty.

b) Zbiór A ma nieskończenie wiele punktów.

c) Zbiór A zawiera się w kole o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu równym $\sqrt{2}$.

3. Niech A oznacza zbiór wszystkich liczb będących iloczynem trzech kolejnych liczb naturalnych. Niech B_k oznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych podzielnych przez liczbę naturalną k.

a) $B_4\subset A$.

b) $128\in B_3\cup A$.

c) $B_k\cup B_{k+1}\neq\emptyset$ dla każdego $k\in\mathbb{N}$.

4. Dane jest równanie $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\frac{x}{x-1}=2$.

a) Równanie ma dwa różne pierwiastki.

b) Istnieje ujemny pierwiastek równania.

c) Istnieje $\alpha\in(\pi,2\pi)$ takie, że $\sin\alpha$ jest pierwiastkiem tego równania.

5. Niech $A=\{\,x: x\in\mathbb{R}-\{\,-3\,\}\wedge\frac{(x-2)^2}{x+3}\leqslant 0\,\}$,
$B_s=\{\,x\colon x\in\mathbb{R}\wedge(x^2-3)(x-s)\geqslant 0\,\}$, gdzie $s\in\mathbb{R}$. Wówczas

a) $A\cap B_1\neq\emptyset$,

b) $A\cup B_{-3}=(-\infty,-\sqrt{3}\rangle$,

c) $A-B_0\neq\emptyset$.

6. Dany jest ciąg $a_n=\log_{\frac{1}{5}}(2\pi)^{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Ciąg a_n jest ciągiem niemalejącym.

b) Ciąg a_n jest ciągiem arytmetycznym.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}<-1$.

7. Dany jest ciąg $S_n(x) = \cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Istnieje takie $x \in \mathbb{R}$, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest nierówność $S_n(x) \leqslant \frac{1}{2}n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = +\infty$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

c) Dla każdego $x \in (0, \pi)$ prawdziwa jest nierówność $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) \geqslant 1$.

8. Niech a_n będzie takim nieskończonym ciągiem, że $(a_{n+1} - a_n)^2 = 5$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

a) a_n jest ciągiem monotonicznym.

b) $b_n = 2^{n|a_{n+1}-a_n|}$ jest ciągiem geometrycznym.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n)^n = 0$.

9. Niech x_1 i x_2 oznaczają dwa różne pierwiastki równania $x^2 - x + c = 0$, gdzie c jest ujemną liczbą rzeczywistą.

a) Dla każdego $c < 0$ ciąg $a_n = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ jest zbieżny do 0.

b) Istnieje $c < 0$ takie, że ciąg $a_n = q^n$, $n \in \mathbb{N}$, gdzie q oznacza mniejszą z liczb x_1 i x_2, jest ciągiem niemalejącym.

c) Dla każdego $c < 0$ istnieje skończona suma wszystkich wyrazów ciągu $a_n = |x_1 - x_2|^n$, $n \in \mathbb{N}$.

10. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oznaczają dowolne funkcje ściśle rosnące i takie, że $g(3) = f(5) = 0$. Wtedy

a) Dla każdego $x \in (3, 5)$ prawdziwa jest nierówność $f(x)g(x) < 0$.

b) W przedziale $(-\infty, 3)$ funkcja $h(x) = f(x)g(x)$ rośnie.

c) Funkcja $h(x) = f(x)g(x)$ jest różnowartościowa.

11. Niech $W(x)$ będzie dowolnym wielomianem stopnia trzeciego, funkcja f, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją przyporządkowującą liczbie rzeczywistej b resztę z dzielenia wielomianu $w(x)$ przez dwumian $x - b$. Niech $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(b) = w(b)f(b)$. Wtedy:

a) Funkcja g ma przynajmniej jedno miejsce zerowe.

b) $\lim\limits_{b\to\infty} g(b) = +\infty$.

c) Funkcja g przyjmuje tylko wartości dodatnie.

12. Niech $f(x) = \log(x^3 - x)$.

a) Dziedziną funkcji f jest zbiór $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

b) $f(\sqrt{10}) = \frac{1}{2} + \log 9$.

c) $f(x) > 3 \log x$ dla każdego $x \in (1, +\infty)$.

13. Niech $f(x) = 3x - \frac{4}{\sqrt{x}}$, gdzie $x > 0$.

a) $f'(2) = 3 + \sqrt{2}$.

b) Istnieje taka liczba całkowita $x_0 > 1$, że $f'(x_0)$ jest liczbą całkowitą.

c) Funkcja f nie ma ekstremów lokalnych.

14. Dany jest wykres funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$ dla $x \in (0, \pi)$.

a) Istnieją dokładnie dwie styczne do wykresu równoległe do prostej $y + 4x = 0$.

b) Punkt o współrzędnych $(\frac{5}{4}, 1)$ leży na jednej ze stycznych do wykresu równoległych do prostej $y = -2x$.

c) Istnieje styczna do wykresu przecinająca oś Ox w punkcie o odciętej większej niż π.

15. Jeśli $g(x) = \frac{(x-3)^2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, to

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$,

b) $\lim\limits_{x\to-2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to-2^-} g(x)$,

c) $g(x^2) \geqslant 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

16. Funkcja $f(x) = \sqrt{x(x-2)}$ spełnia warunek:

a) ma w punkcie 4 minimum lokalne,

b) osiąga swoją najmniejszą wartość,

c) istnieje styczna do wykresu funkcji f równoległa do osi Ox.

17. Dany jest trójkąt ABC taki, że $|AB| = \sqrt{7}$, $|BC| = 1$, $|CA| = \sqrt{5}$.

a) Jeden z kątów trójkąta ABC jest większy od $\frac{2}{3}\pi$.

b) Symetralne boków trójkąta ABC przecinają się w punkcie należącym do jednego z boków trójkąta ABC.

c) Długości dwóch wysokości trójkąta ABC są równe.

18. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ABC. Punkt D (różny od A i od B) należy do łuku AB tego okręgu , przy czym kąt ADB jest rozwarty.

a) $\cos\angle ADB = \cos\angle ABC$.

b) $\cos\angle ADB = \cos\angle AOB$.

c) Pole powierzchni trójkąta ADB jest nie większe od jednej trzeciej pola powierzchni trójkąta ABC.