Grafika Komputerowa. Krzywe Béziera

Aleksander Denisiuk
Polsko-Japońska Akademia Technik Komputerowych
Wydział Informatyki w Gdańsku
ul. Brzegi 55
80-045 Gdańsk

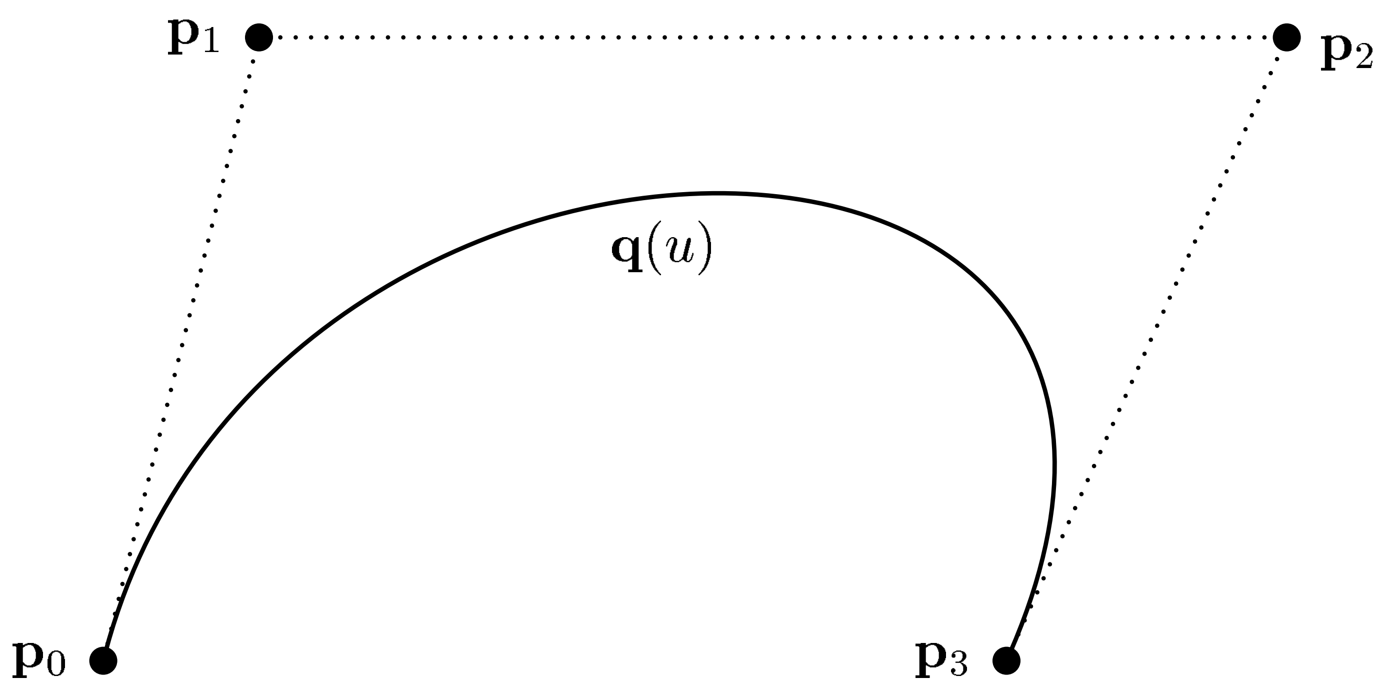
denisjuk@pja.edu.pl

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

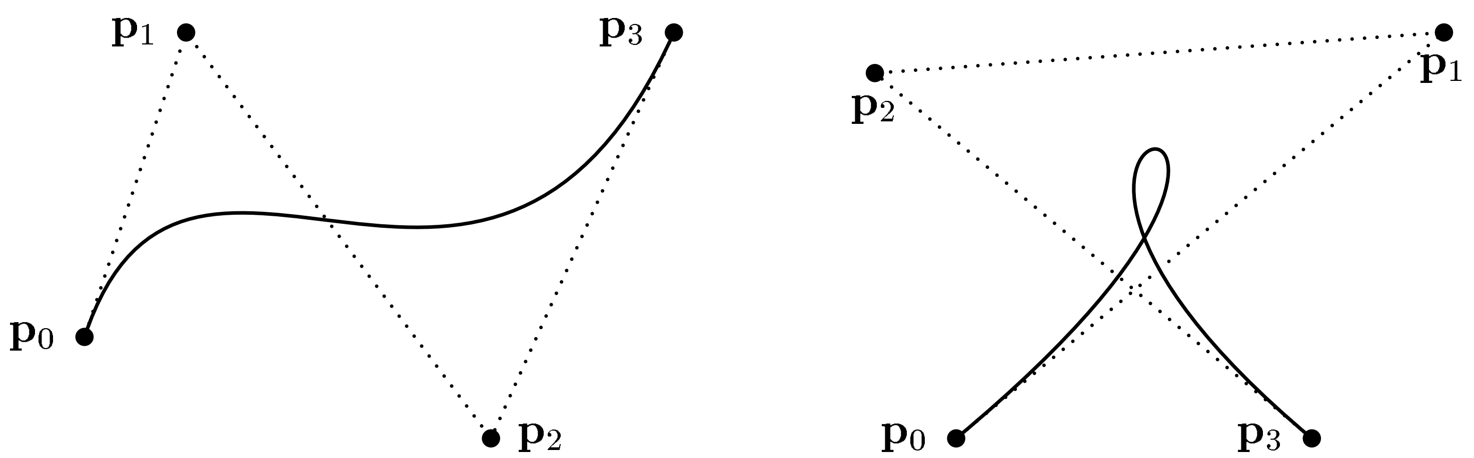
`http://users.pja.edu.pl/~denisjuk`

- Krzywe Béziera
  - Pierre Bézier — Renault: 1968, 1974
  - Paul de Casteljau — Citroën: 1959, 1963
- B-splajny (Isaac Jacob Schoenberg 1946)

Krzywe Béziera trzeciego stopnia

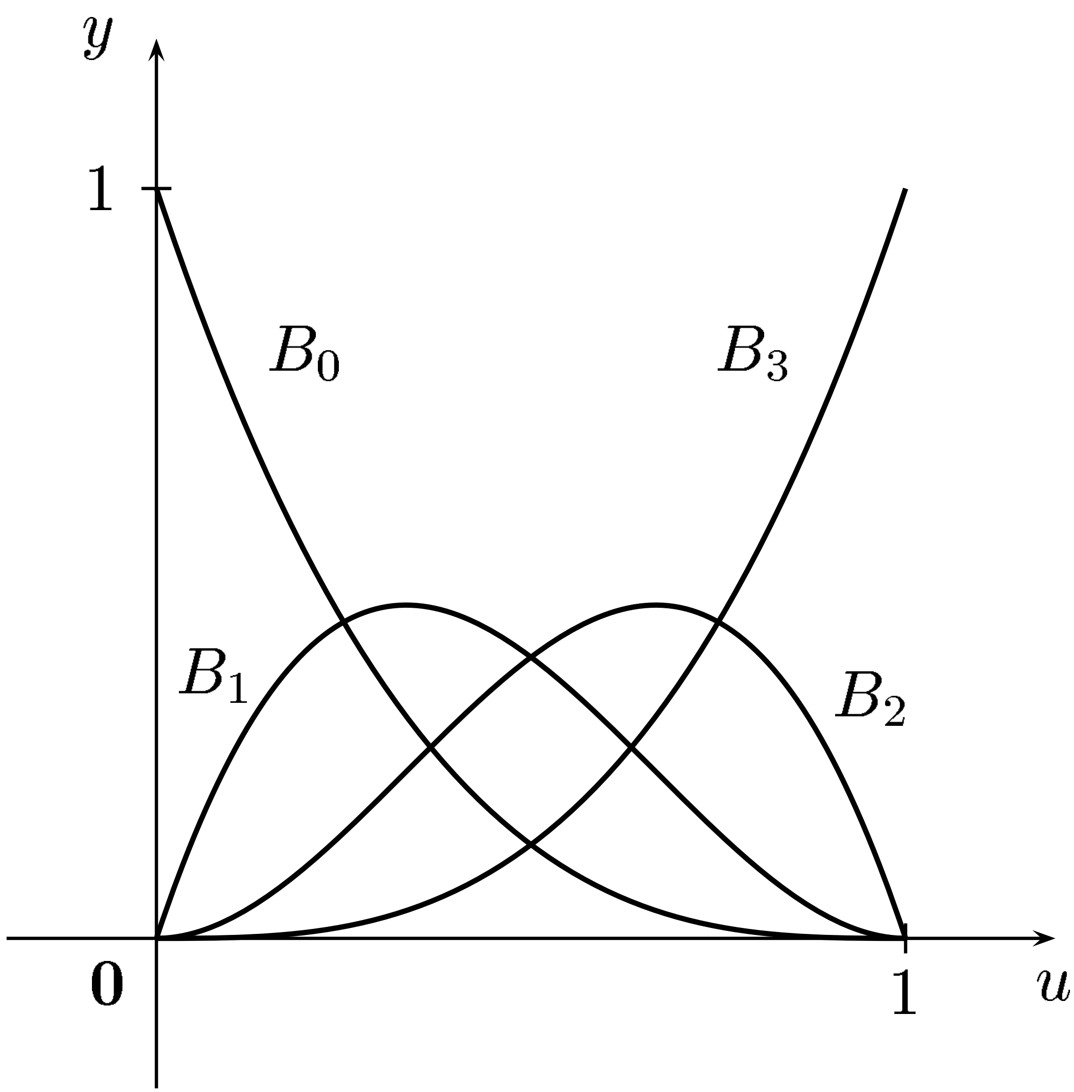


Krzywe Béziera trzeciego stopnia



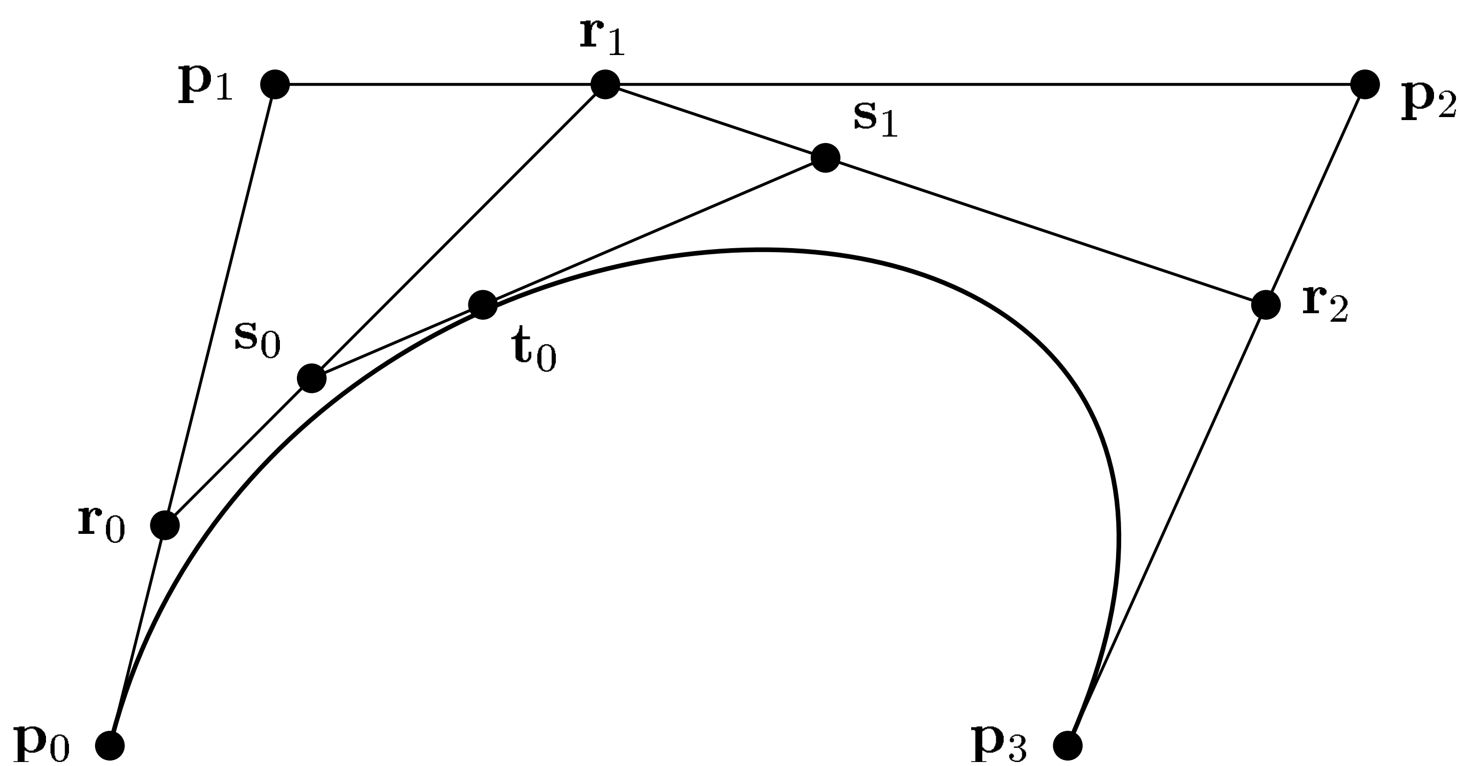
Krzywe Béziera trzeciego stopnia

- $q(u) = B_0(u)p_0 + B_1(u)p_1 + B_2(u)p_2 + B_3(u)p_3$, gdzie
  - $B_i(u) = \binom{3}{i} u^i (1-u)^{3-i}$ — wielomiany Bernsteina,
  - $\binom{n}{m} = C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ — symbol Newtona
  - $B_0(u) = (1-u)^3, \quad B_1(u) = 3u(1-u)^2$
  - $B_2(u) = 3u^2(1-u), \quad B_3(u) = u^3$
  - $\sum\limits_{i=0}^{3} B_i(u) = \sum\limits_{i=0}^{3} \binom{3}{i} u^i (a-u)^{3-i} = \big(u + (1-u)\big)^3 = 1$


y
1
B_0
B_3
B_1
B_2
0
1
u

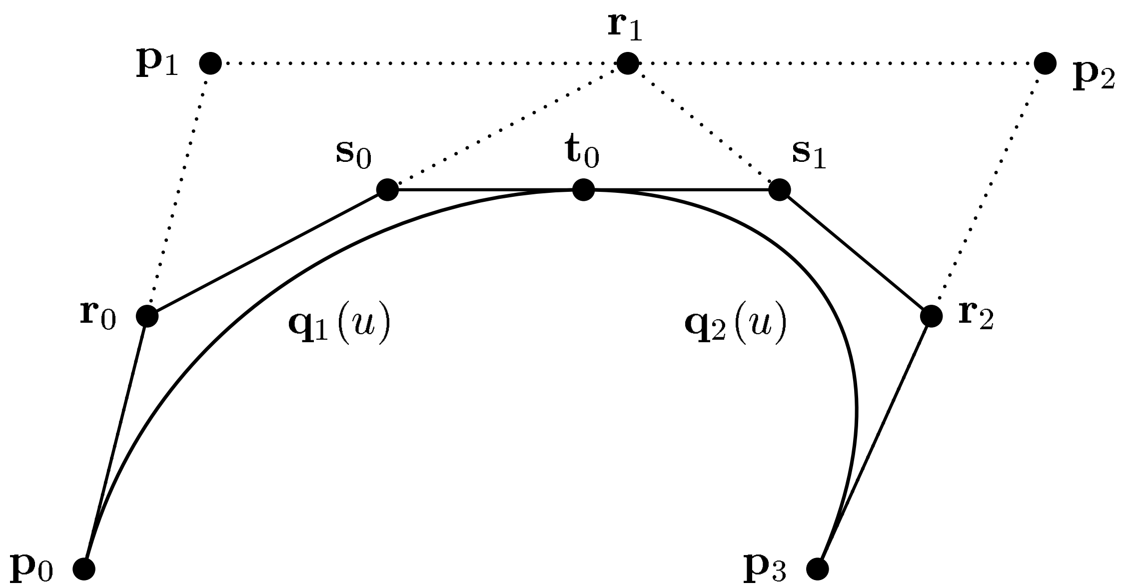
$$\begin{array}{llll} B_0'(0) = -3, & B_1'(0) = 3, & B_2'(0) = 0, & B_3'(0) = 0 \\ B_0'(1) = 0, & B_1'(1) = 0, & B_2'(1) = -3, & B_3'(1) = 3 \end{array}$$

$$q'(0) = 3(p_1 - p_0),$$
$$q'(1) = 3(p_3 - p_2)$$



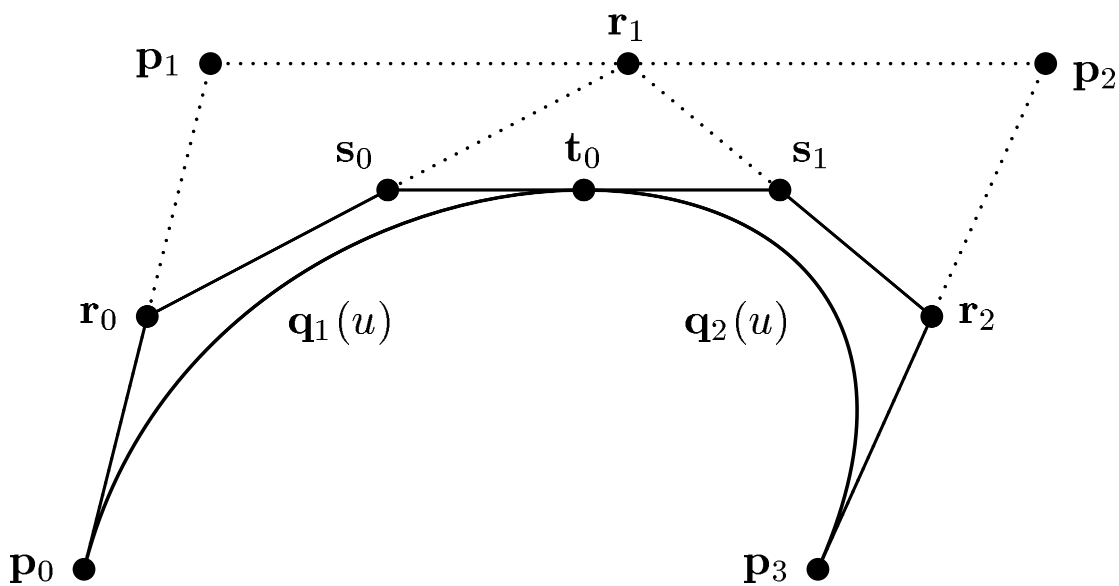
$$r_i = (1-u)\cdot p_i + u \cdot p_{i+1},$$
$$s_i = (1-u)\cdot r_i + u \cdot p_{i+1},$$
$$t_0 = (1-u)\cdot s_0 + u s_1$$

Algorytm de Casteljau ($u = \frac{1}{2}$)

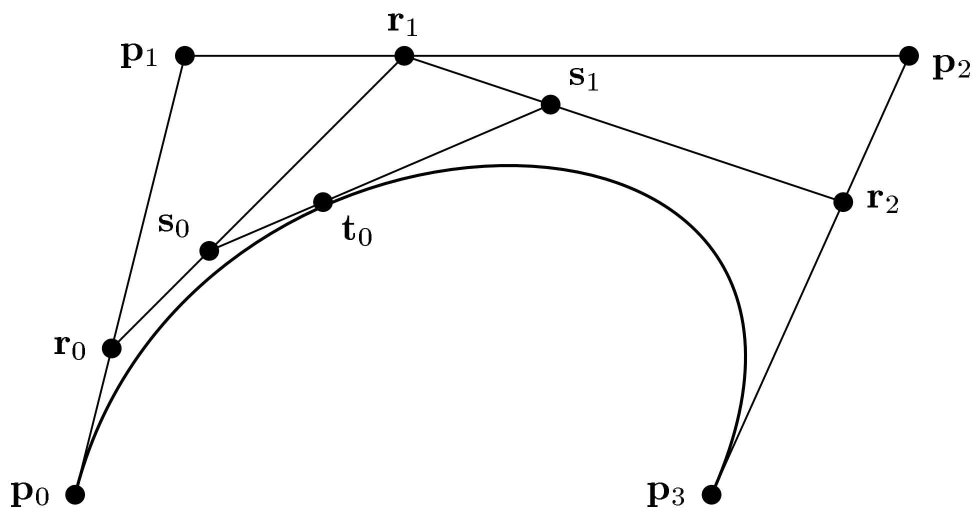


$$r_i = \frac{p_i + p_{i+1}}{2}, \quad s_i = \frac{r_i + r_{i+1}}{2}, \quad t_0 = \frac{s_0 + s_1}{2},$$

$$q(1/2) = t_0 = \frac{1}{8}p_0 + \frac{3}{8}p_1 + \frac{3}{8}p_2 + \frac{1}{8}p_3$$



Twierdzenie 1. *Niech $q(u)$ będzie krzywą Béziera o punktach kontrolnych p_0, p_1, p_2, p_3. Wtedy $q_1(u) = q(u/2)$ będzie Krzywą Béziera o punktach kontrolnych p_0, r_0, s_0, t_0, $q_2(u) = q((u+1)/2)$ będzie krzywą Béziera o punktach t_0, s_1, r_2, p_3.*

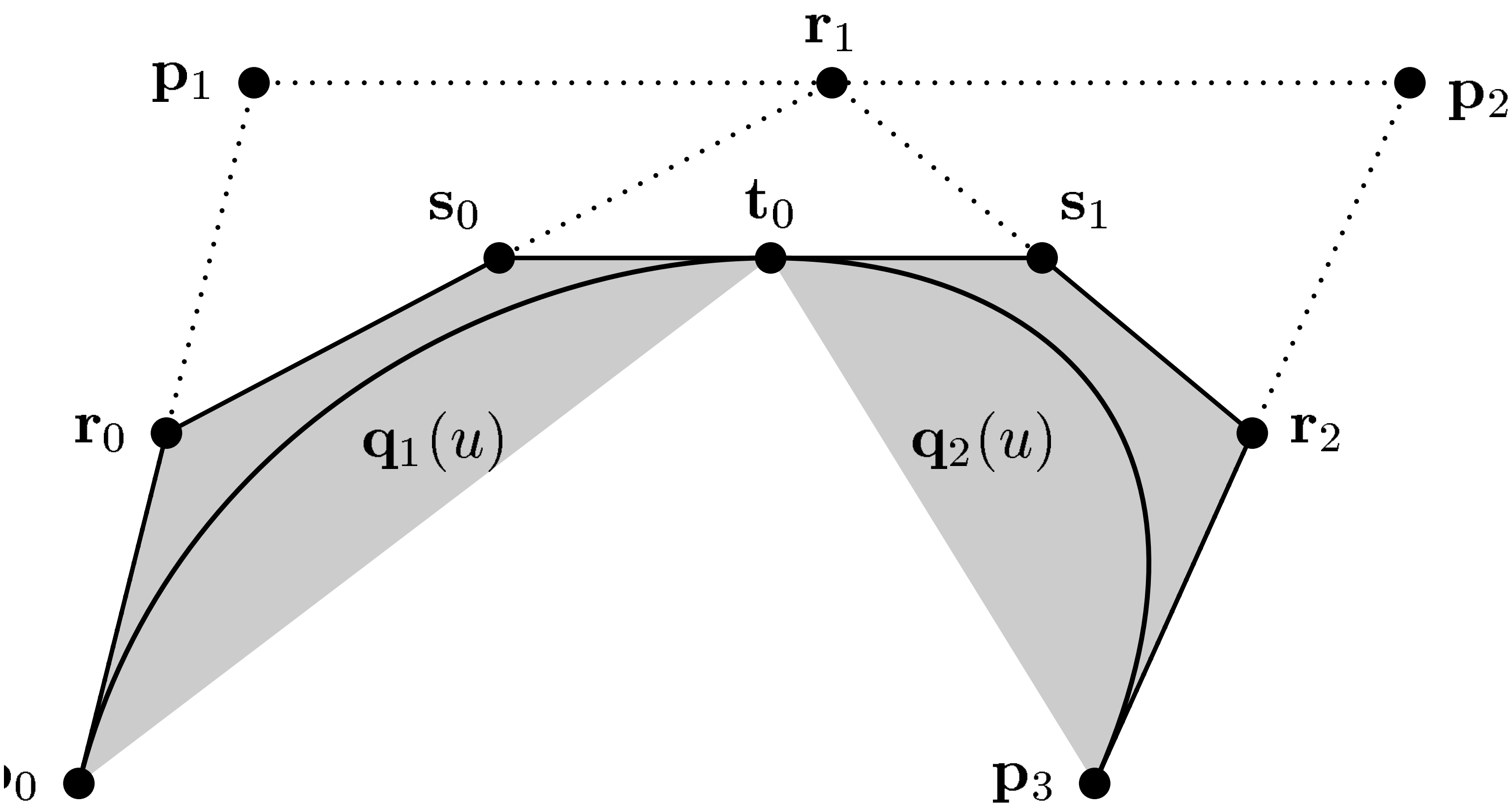


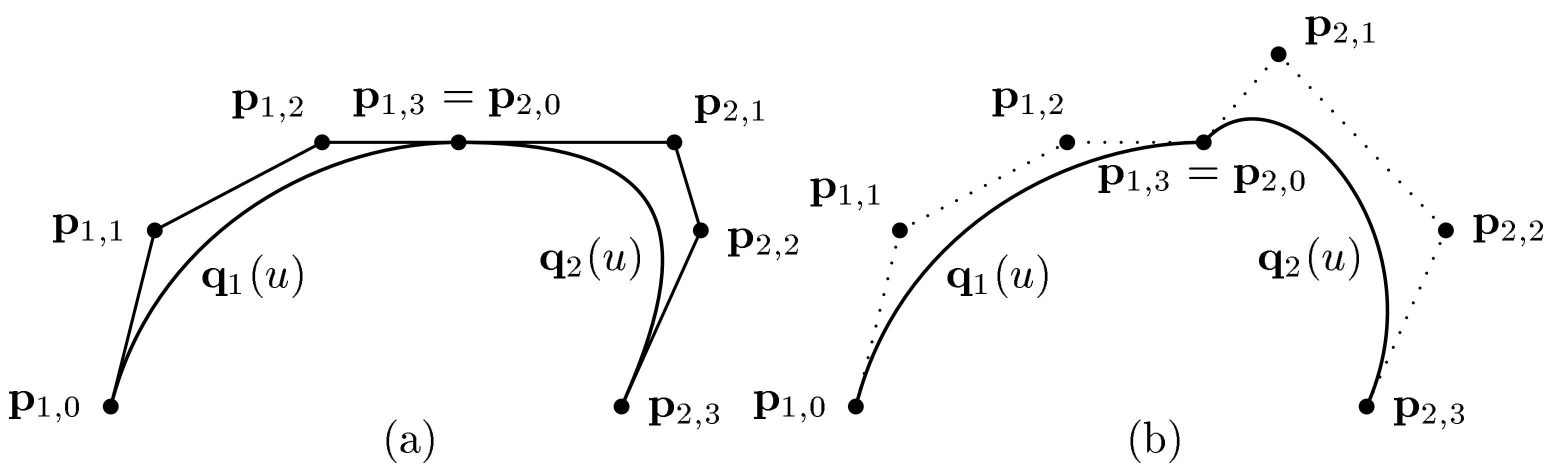
Twierdzenie 2. *Niech $q(u)$ będzie krzywą Béziera o punktach kontrolnych p_0, p_1, p_2, p_3. Wtedy $q_1(u) = q(u_0 u)$ będzie Krzywą Béziera o punktach kontrolnych p_0, r_0, s_0, t_0, $q_2(u) = q(u_0 + (1 - u_0)u)$ będzie krzywą Béziera o punktach t_0, s_1, r_2, p_3.*

- $\|q(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(p_0 + p_3)\| < \varepsilon,$
- $\|p_0 - p_1 - p_2 + p_3\|^2 < (8\varepsilon/3)^2,$
- $p_1, p_2 \approx\in \overline{p_0 p_3}$

Właściwość otoczki wypukłej

- Krzywa Béziera zawiera się w otoczce wypukłej swoich punktów kontrolnych





$$q_1'(1) = q_2'(0) \Rightarrow p_{1,3} - p_{1,2} = p_{2,1} - p_{2,0}$$

- Dane są punkty $p_0, \ldots, p_m$ i węzły $u_0, \ldots, u_m$.
- Określić parametryzowaną krzywą $q(u)$ tak, żeby $q(u_i) = p_i$ dla $i = 0, \ldots, m$.
- Krzywa odcinkowo-wielomianowa (trzeciego stopnia).
- Sklejanie krzywych Béziera.

- Dane są punkty $P_0, \ldots, P_m$ i węzły $u_i = i$ dla $i = 0, \ldots, m$.
- Określić parametryzowaną krzywą $q(u)$ tak, żeby $q(i) = P_i$ dla $i = 1, \ldots, m-1$.
- Krzywa Catmull-Rom składa się z $m-2$ krzywych Béziera.
- Punkty kontrolne wybiera się tak, żeby krzywa była klasy C^1.

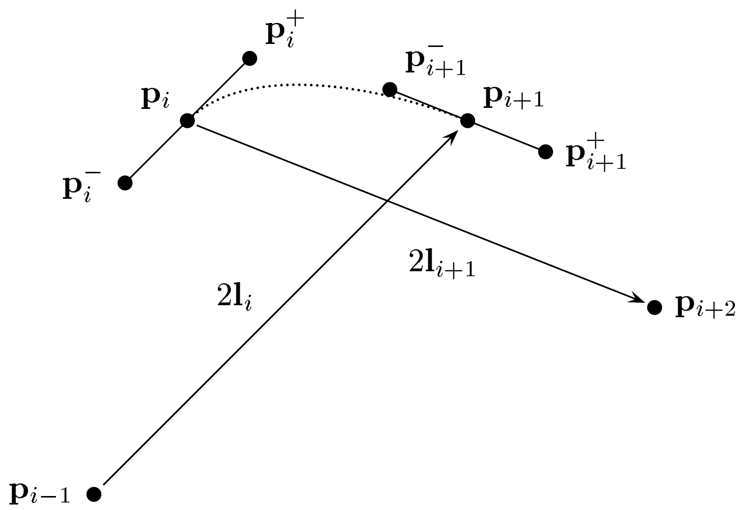
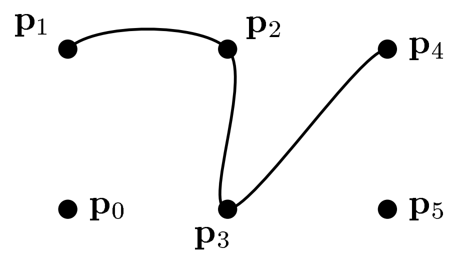


Figure VII.22: Defining the Catmull-Rom spline segment from the point $\mathbf{p}_i$ to the point $\mathbf{p}_{i+1}$. The points $\mathbf{p}_i^-$, $\mathbf{p}_i$, and $\mathbf{p}_i^+$ are collinear and parallel to $\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i-1}$. The points $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{p}_i^+$, $\mathbf{p}_{i+1}^-$, and $\mathbf{p}_{i+1}$ form the control points of a degree three Bézier curve, which is shown as a dotted curve.

$$l_i = \frac{1}{2}(p_{i+1} - p_{i-1}), \quad p_i^{\pm} = p_i \pm \frac{1}{3} l_i$$



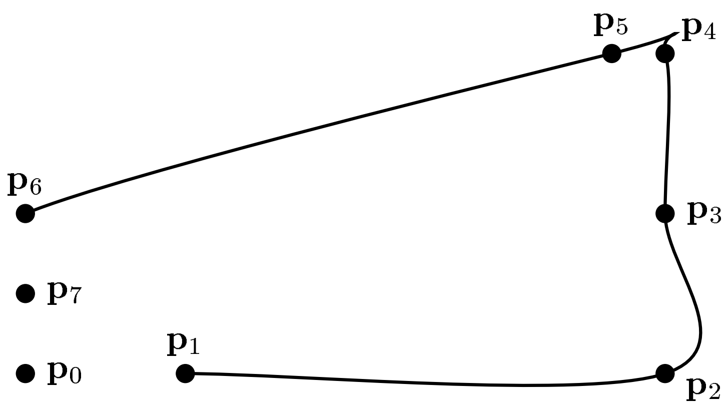


Figure VII.23: Two examples of Catmull-Rom splines with uniformly spaced knots.

$$q(u) = \sum_{i=0}^{k} B_i^k(u) p_i$$

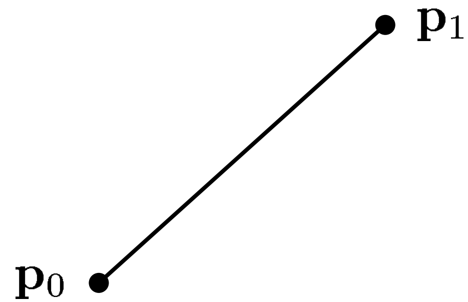
$$B_i^k(u) = \binom{k}{i} u^i (1-u)^{k-i},$$

$$\sum_{i=0}^{k} B_i^k(u) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} u^i (1-u)^{k-i} = \big(u + (1-u)\big)^k = 1,$$

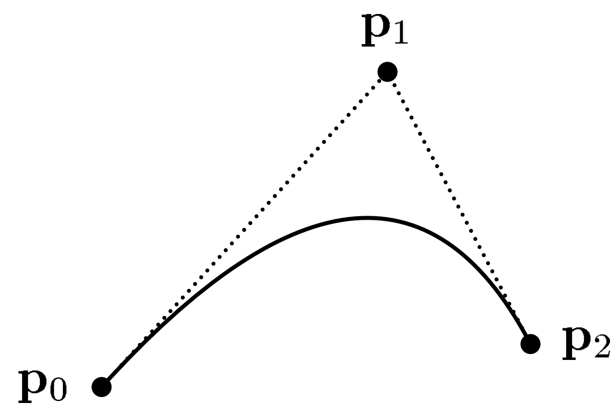
$$q'(0) = k(p_1 - p_0),$$

$$q'(1) = k(p_k - p_{k-1}).$$

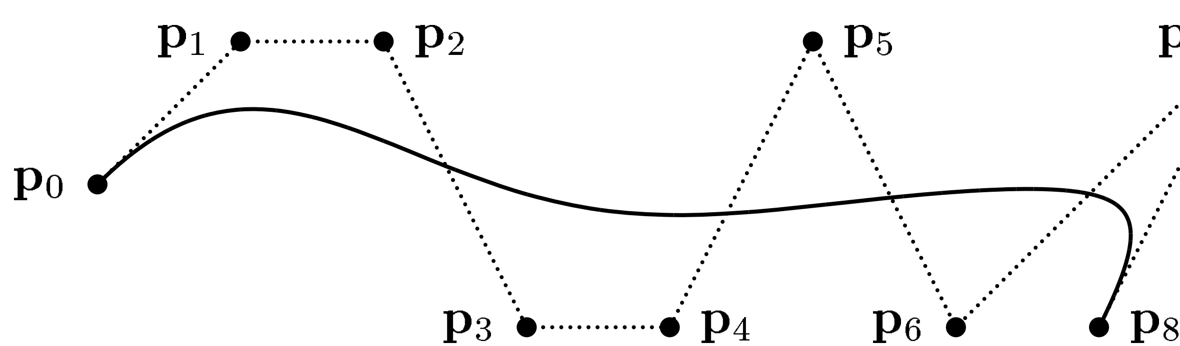
Krzywe Béziera dowolnego stopnia



(a) Degree one



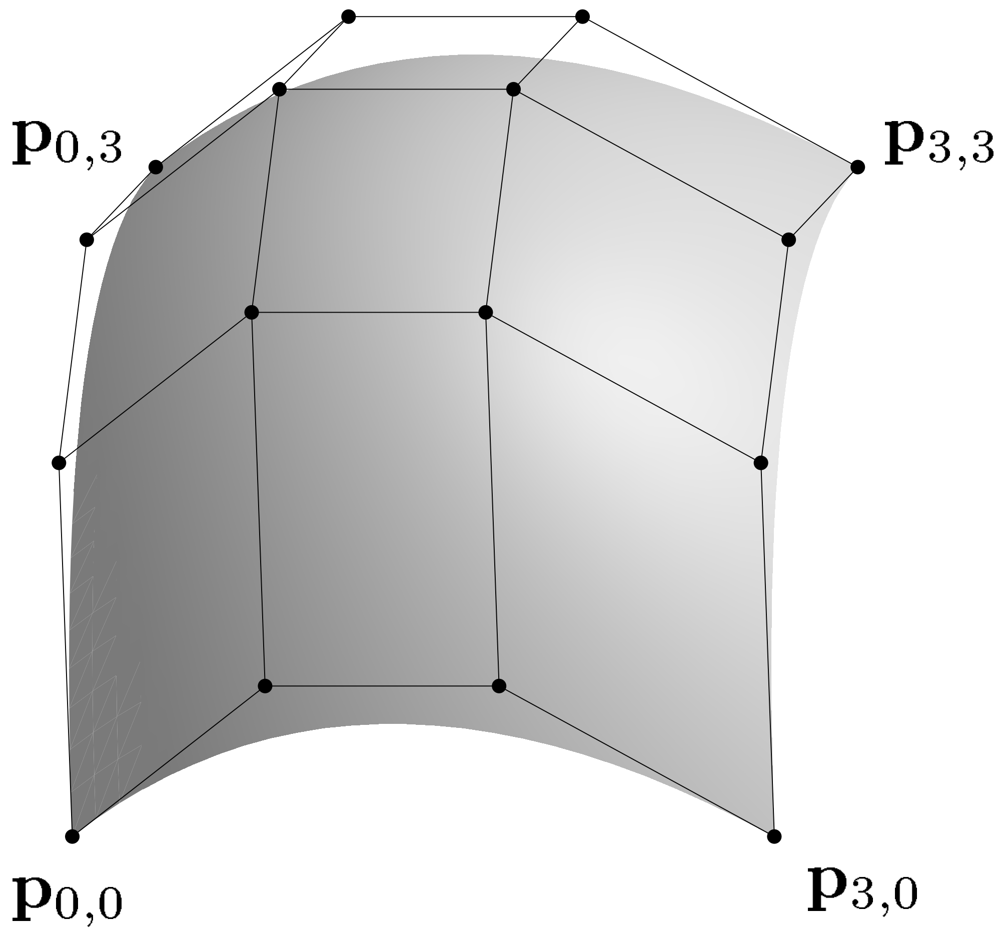
(b) Degree two



(c) Degree eight

$$\hat{P}_0 = P_0 \quad \hat{P}_{k+1} = P_k$$

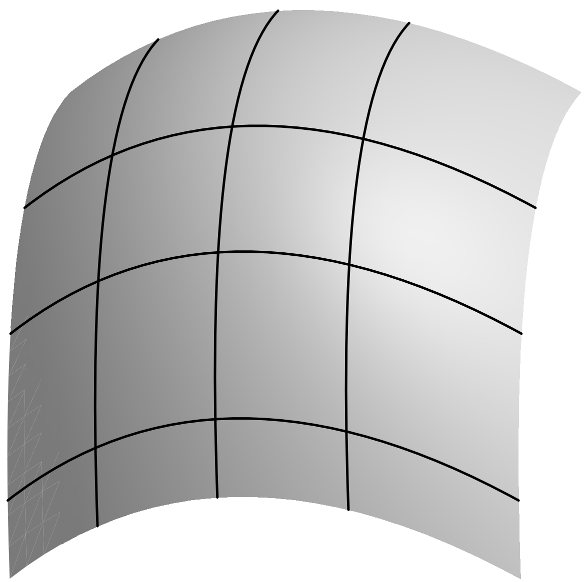
$$\hat{P}_i = \frac{i}{k+1} P_{i-1} + \frac{k-i+1}{k+1} P_i$$


$\mathbf{p}_{0,3}$
$\mathbf{p}_{3,3}$
$\mathbf{p}_{0,0}$
$\mathbf{p}_{3,0}$

Powierzchnie Béziera trzeciego stopnia

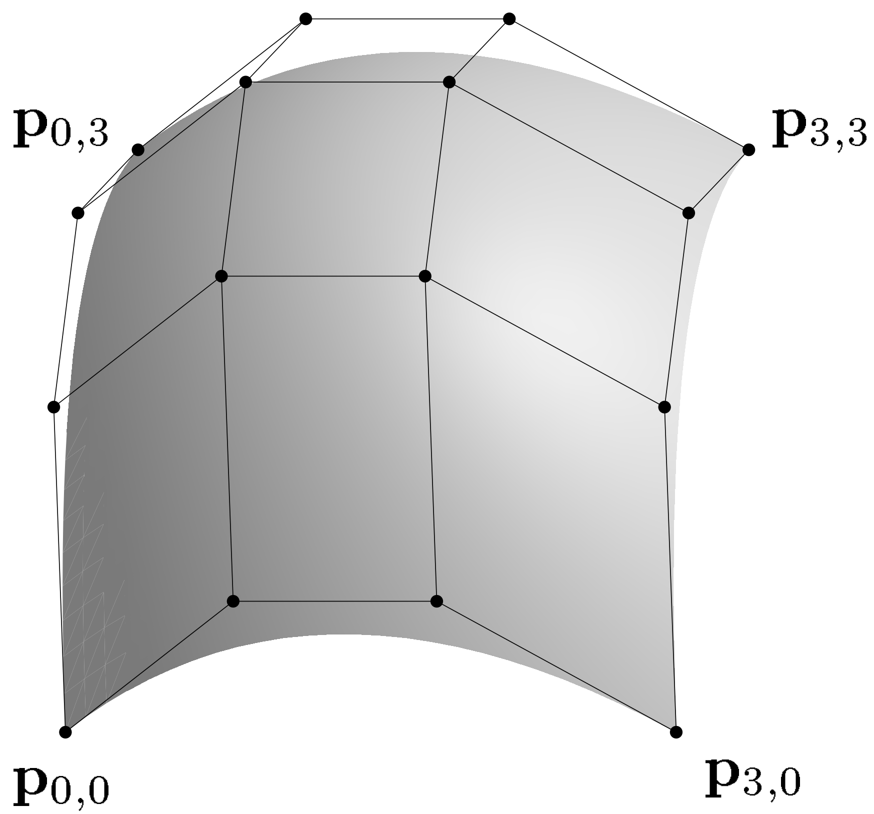
$$
\begin{aligned}
q(u,v) &= \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} B_i(u)B_j(v)p_{i,j} = \\
&= \sum_{i=0}^{3}\left(B_i(u)\sum_{j=0}^{3} B_j(v)p_{i,j}\right) = \\
&= \sum_{j=0}^{3} B_j(v)\left(\sum_{i=0}^{3} B_i(u)p_{i,j}\right), \\
(u,v) &\in [0,1]\times[0,1]
\end{aligned}
$$

Przekrój powierzchni Béziera



- $q(u,v) = \sum_{i=0}^{3} \left(B_i(u) \sum_{j=0}^{3} B_j(v) p_{i,j} \right)$
- $r_i = \sum_{j=0}^{3} B_j(v) p_{i,j}, \quad s_j = \sum_{i=0}^{3} B_i(u) p_{i,j}$

Graniczne linie powierzchni Béziera



- $v = 0, \quad u \in [0, 1]$: granica „przednia”, $p_{i,0}$
- $u = 0, \quad v \in [0, 1]$: granica „lewa”, $p_{0,j}$

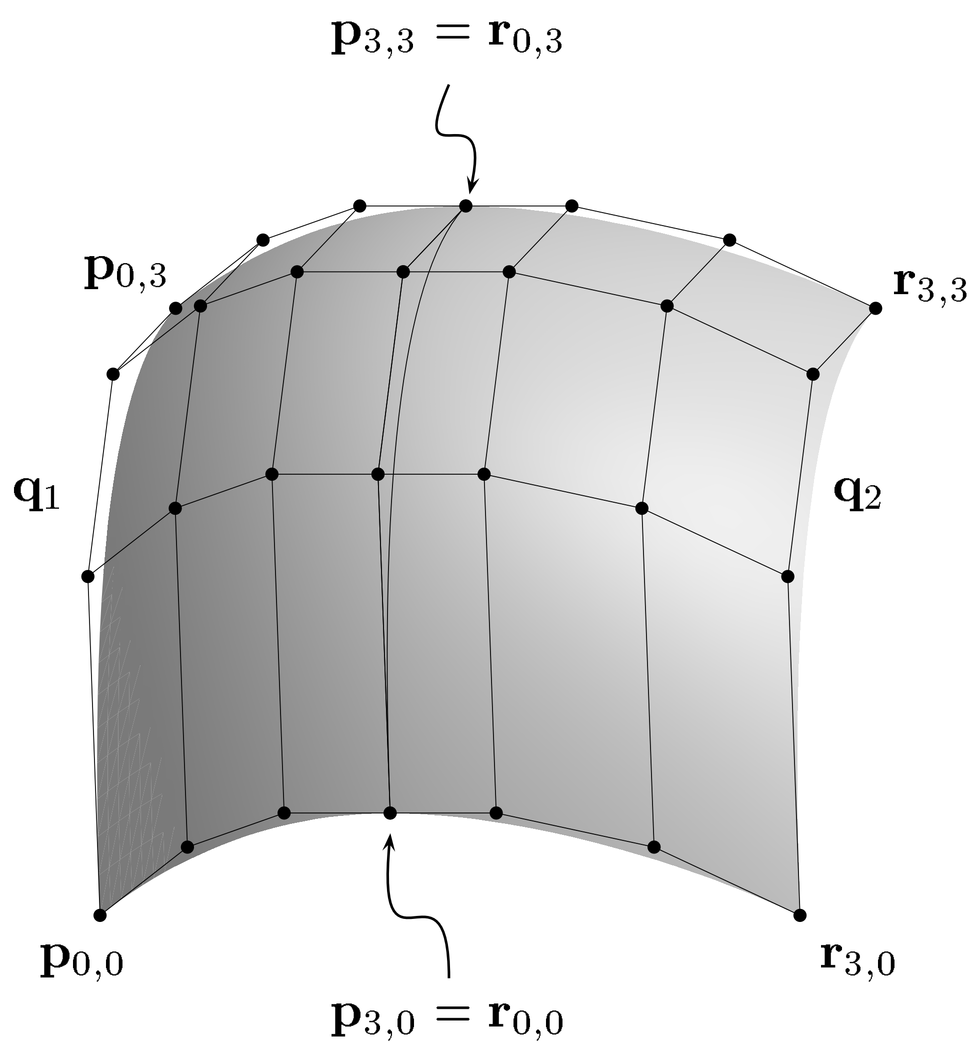
Pochodne cząstkowe powierzchni Béziera

$$\frac{\partial q}{\partial v}(u,0) = \sum_{i=0}^{3} 3B_i(u)(p_{i,1} - p_{i,0})$$

$$\frac{\partial q}{\partial v}(u,1) = \sum_{i=0}^{3} 3B_i(u)(p_{i,3} - p_{i,2})$$

$$\frac{\partial q}{\partial u}(0,v) = \sum_{i=0}^{3} 3B_j(v)(p_{1,j} - p_{0,j})$$

$$\frac{\partial q}{\partial v}(1,v) = \sum_{i=0}^{3} 3B_j(v)(p_{3,j} - p_{3,j})$$


$\mathbf{p}_{3,3} = \mathbf{r}_{0,3}$
$\mathbf{p}_{0,3}$
$\mathbf{r}_{3,3}$
$\mathbf{q}_1$
$\mathbf{q}_2$
$\mathbf{p}_{0,0}$
$\mathbf{r}_{3,0}$
$\mathbf{p}_{3,0} = \mathbf{r}_{0,0}$

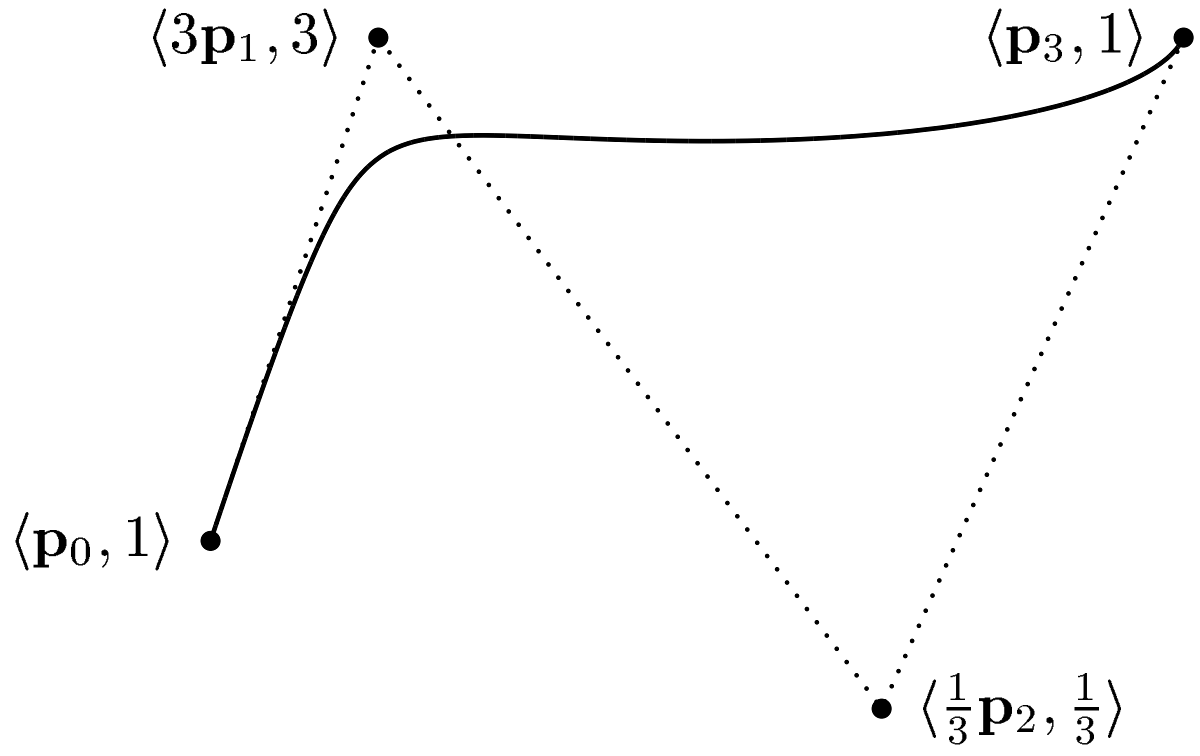
Wymierne krzywe Béziera

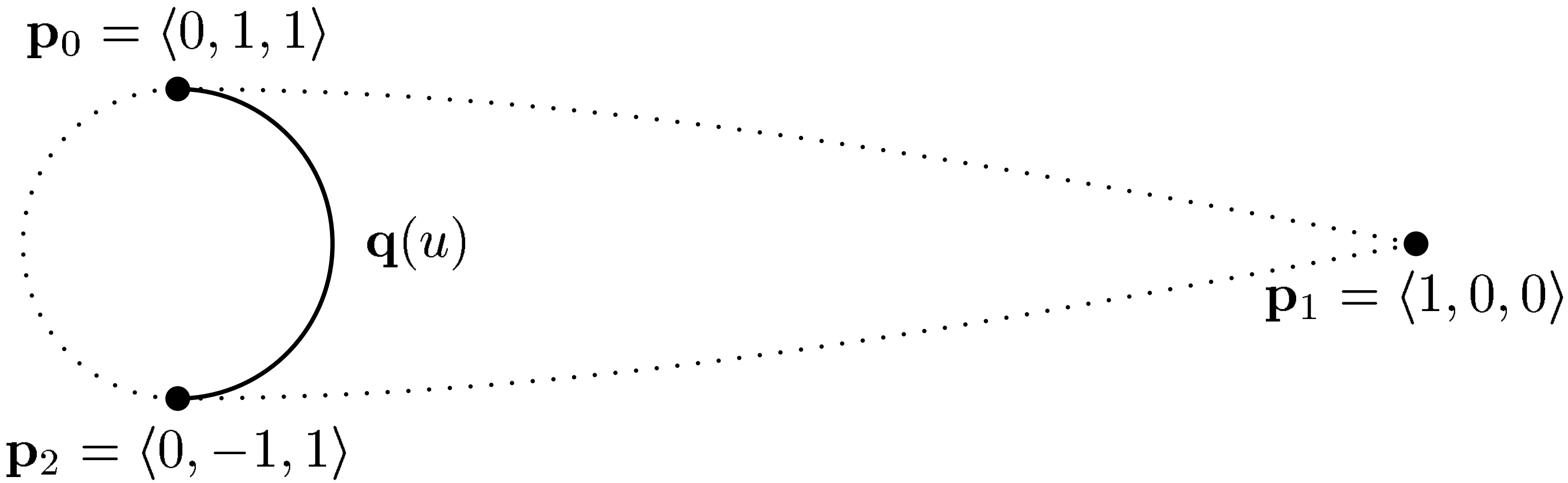
$p_i = (x : y : z : w),$

$$q(u) = \sum_i B_i^k(u) p_i$$

- współrzędna w pozwala na powiększenie wagi punktu kontrolnego
- modelowanie krzywych stożkowych
- rzut perspektywiczny krzywej wymiernej jest zawsze krzywą wymierną
- punkty kontrolne mogą być umieszczone w nieskończoności

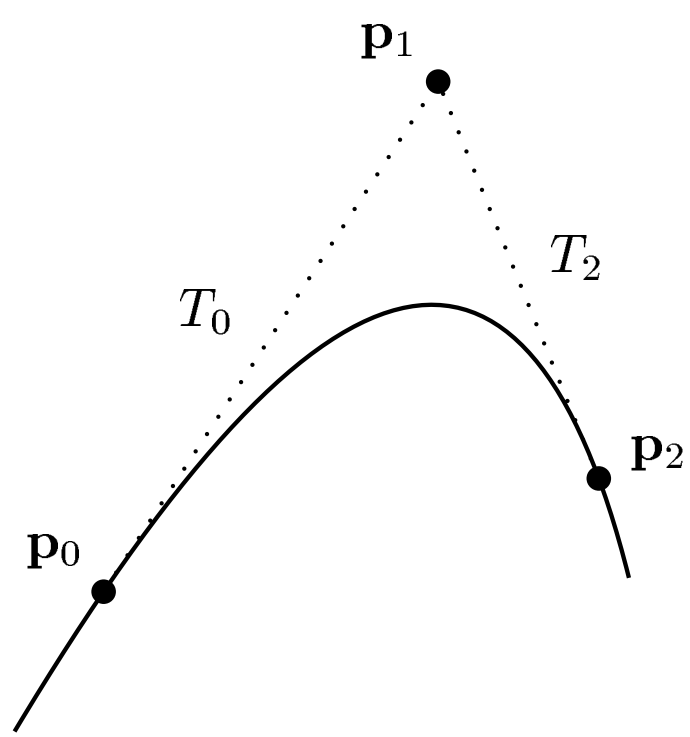
$$q(u) = \sum_i B_i^k(u)(w_i p_i : w_i) \sim \sum_i \frac{w_i B_i^k(u)}{\sum_j w_j B_i^k(u)} p_i$$



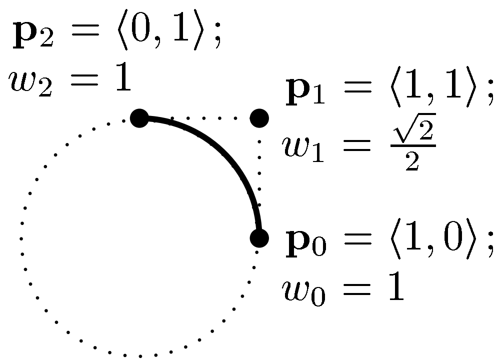


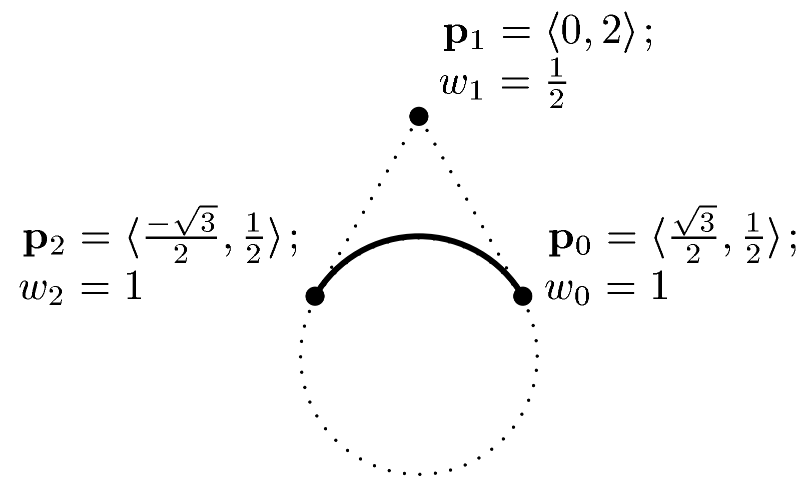
$$
\begin{aligned}
q(u) &= (1-u)^2 p_0 + 2u(1-u)p_1 + u^2 p_2 = \\
&= \left(2u(1-u) : (1-u)^2 - u^2 : (1-u)^2 + u^2\right) \sim \\
&\sim \left(\frac{2u(1-u)}{(1-u)^2+u^2}, \frac{(1-u)^2-u^2}{(1-u)^2+u^2}\right)
\end{aligned}
$$

Twierdzenie 3. *Niech T_0 i T_2 będą stycznymi do krzywej stożkowej C w punktach p_0 i p_2, p_1 bęzie punktem przecięcia T_0 i T_2. Wtedy istnieje waga $w \geqslant 0$ taka, że wymierna krzywa Béziera o punktach kontrolnych $(p_0 : 1)$, $(p_1 : w)$, $(p_2 : 1)$ generuje odcinek krzywej C pomiędzy p_0 a p_2.*

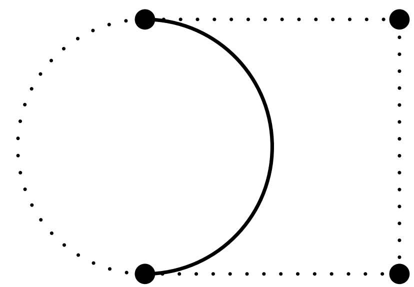


Krzywe stożkowe

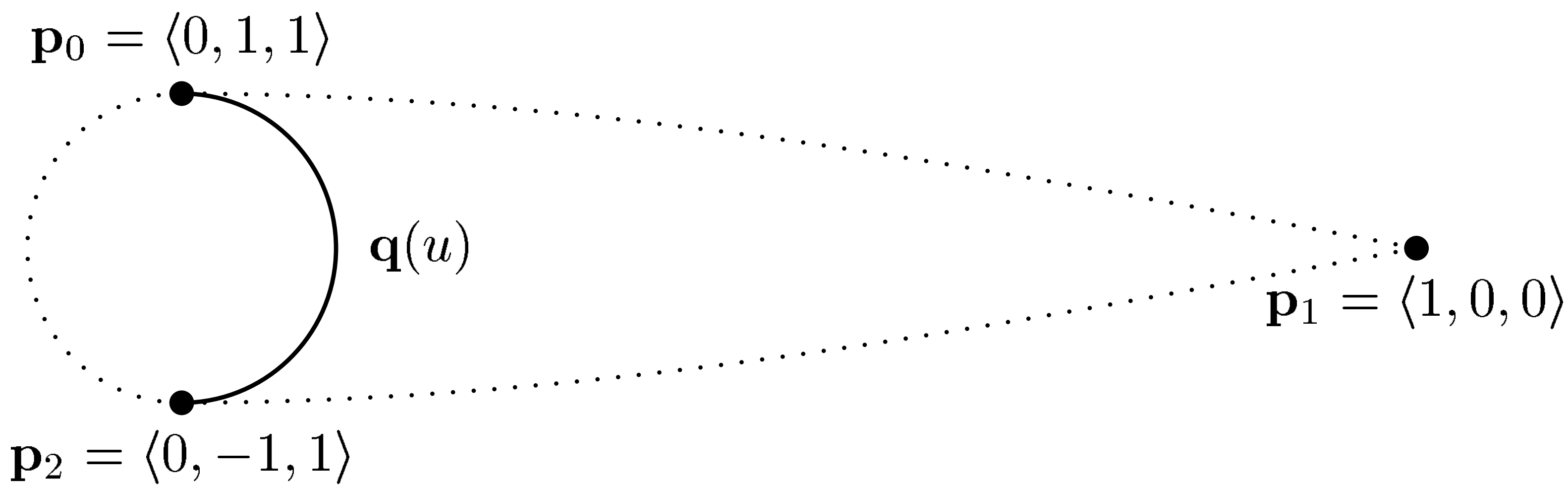


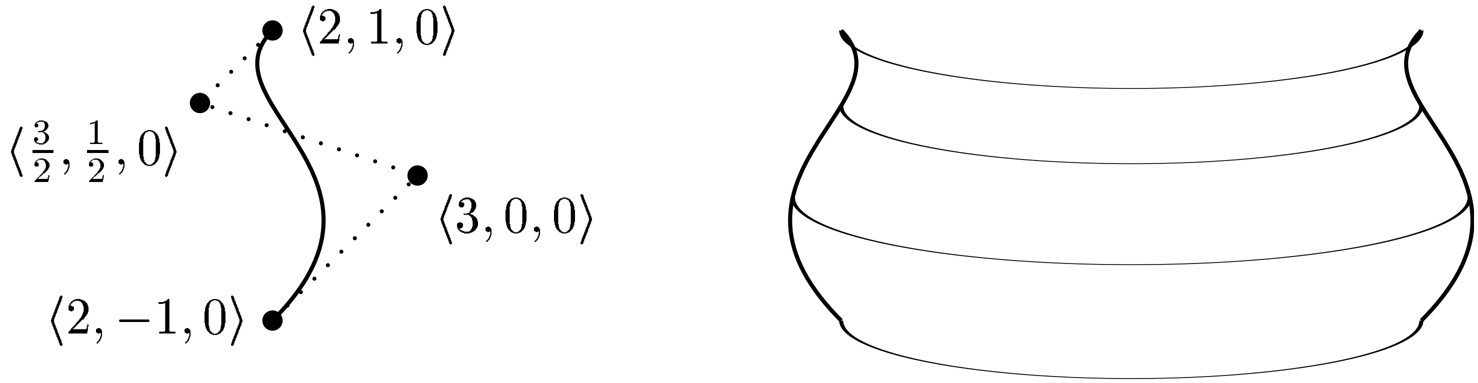


Półokrąg jako krzywa trzeciego stopnia



$$(p_0, p_1, p_2) \mapsto (p_0^* = Mp_0, p_1^* = Mp_1, p_2^* = Mp_2)$$





(a) (b)

$$
\begin{array}{ccc}
(-2 : 1 : 0 : 1) & (0 : 0 : 2 : 0) & (2 : 1 : 0 : 1) \\
(-\frac{3}{2} : \frac{1}{2} : 0 : 1) & (0 : 0 : \frac{3}{2} : 0) & (\frac{3}{2} : \frac{1}{2} : 0 : 1) \\
(-3 : 0 : 0 : 1) & (0 : 0 : 3 : 0) & (3 : 0 : 0 : 1) \\
(-2 : -1 : 0 : 1) & (0 : 0 : 2 : 0) & (2 : -1 : 0 : 1)
\end{array}
$$