Grafika Komputerowa. Geometria 3W

Aleksander Denisiuk
Polsko-Japońska Akademia Technik Komputerowych
Wydział Informatyki w Gdańsku
ul. Targ Drzewny 9/11
80-894 Gdańsk

denisiuk@pja.edu.pl

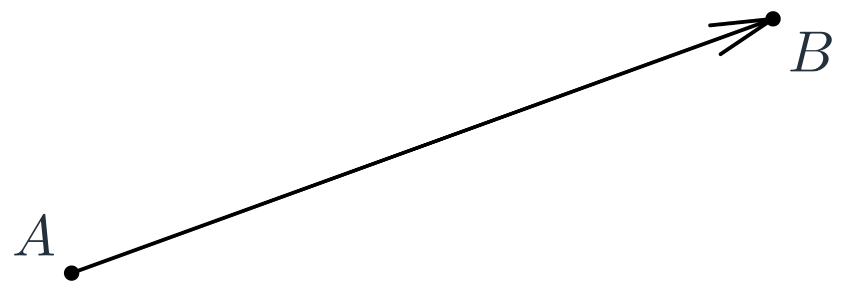
Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

`http://users.pja.edu.pl/~denisjuk`

Przestrzeń liniowa $\mathbb{R}^3$ (Przypomnienie)

Definicja wektora

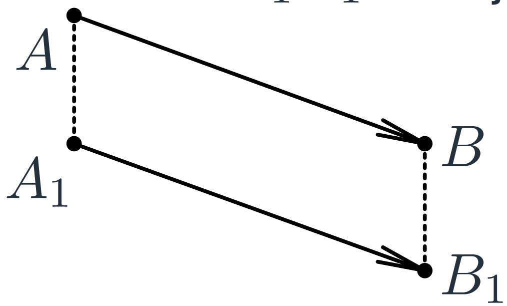
- *Wektorem* nazywa się skierowany odcinek.



- Kierunek wektora pokazuje strzałka.
- Punkt A jest *początkiem* wektora
- Punkt B jest *końcem* wektora
- Oznaczenie: $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$

Równość wektorów

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} = \boldsymbol{a}$ jeżeli ABB_1A_1 jest równoległobokiem:



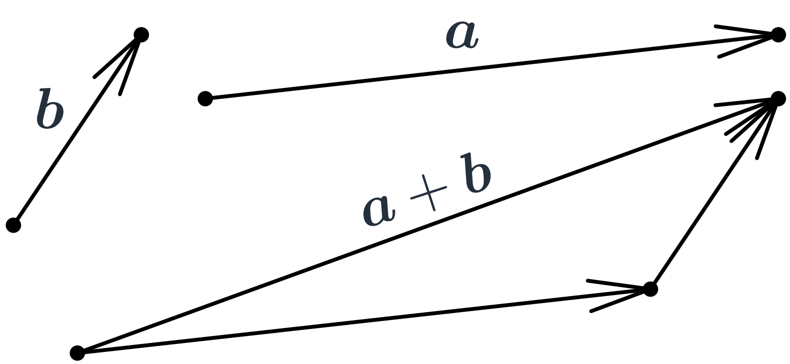
- Relcja równości wektorów jest *relacją równoważności:*
  - $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ (symetryczna)
  - $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ (zwrotna)
  - $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \Rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}$ (przechodnia)
- Nie odróżniamy równych wektorów
  - każdy wektor może się zacząć w dowolnym pinkcie

Wektory, cd

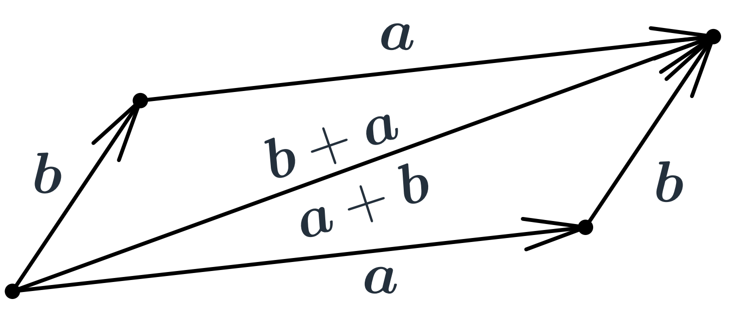
- Dwa wektory są *zgodnie kolinearne (współliniowe),* jeżeli są równoległe i mają ten sam zwrot.
- Dwa wektory są *niezgodnie kolinearne (współliniowe),* jeżeli są równoległe i mają przeciwne zwroty.
- Długość odcinka AB, przedstawiającego wektor $\boldsymbol{a}$, nazywa się jego *długością* $|AB| = |\boldsymbol{a}| = \|\boldsymbol{a}\|$
- wektor nazywa się *zerowym,* jeśli jego początek i koniec się pokrywają: $\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$

Dodawanie wektorów

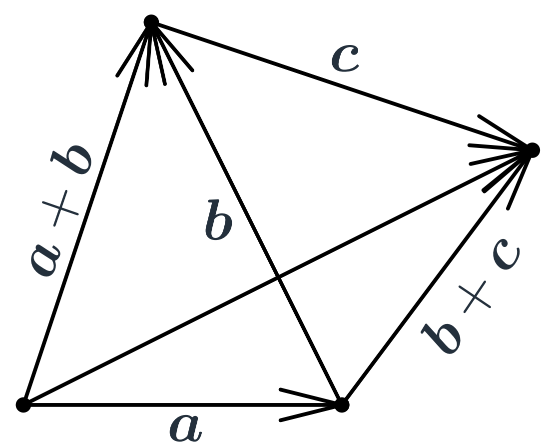
- *Sumą* wektorów $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ nazywa się wektor $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, otrymany z tych wektorów bądź równych im wektorów jak na poniższym rysunku



- $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$

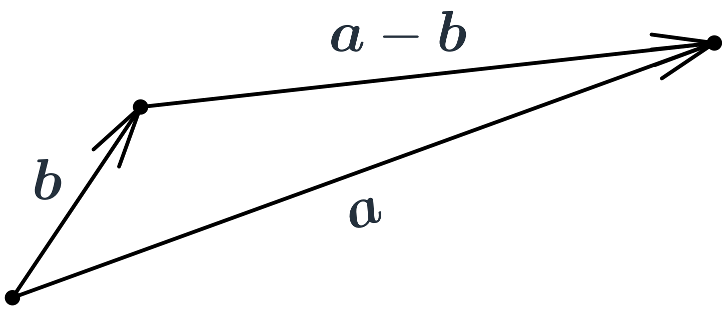


- $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$



Odejmowanie wektorów

- Wektor $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ — jest wektorem, suma którego z b



Mnożenie wektora przez liczbę (skalowanie)

- Iloczynem wektora $\boldsymbol{a}$ i liczby $\lambda \in \mathbb{R}$ jest wektor $\lambda\boldsymbol{a}$
  - $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|$
  - $\lambda\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{a}$ są zgodnie kolinearne, jeżeli $\lambda > 0$ oraz niezgodnie kolinearne, gdy $\lambda < 0$
  - $0 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$
- $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$
- $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$
- $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$

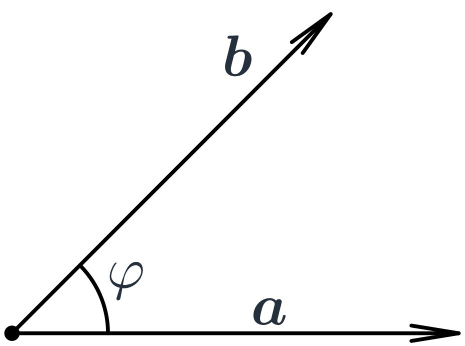
- Niech dany będzie układ wektorów $\{\, \boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_k} \,\}$ oraz wagi (liczby rzeczywiste) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$
- Wektor

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{a_k}$$

nazywa się *kombinacją liniową* wektorów $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_k}$.

Iloczyn skalarny wektorów

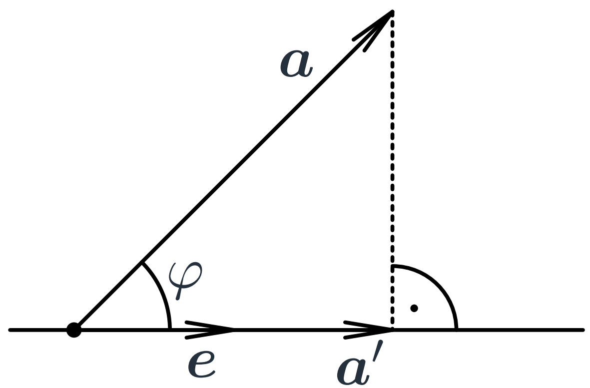
- Iloczynem skalarnym wektorów $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ jest liczba:
  - $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{ab} = |a||b| \cos \varphi$
    - φ jest kątem międy $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$
- $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$



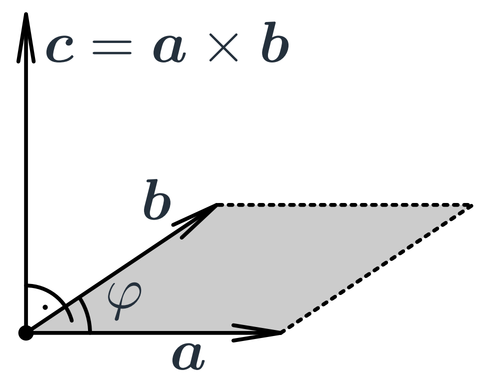
- $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a}\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$
- $(\lambda \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})$
- $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}$
- $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = 0 \iff \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ albo jeden z wektorów jest zerowy
- $\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$
  - jeżeli $|a| = |b| = 1$, to $\cos\varphi = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$
    - normalizacja: $\boldsymbol{a} \mapsto \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{b}|}$
- OpenGL (GLSL):
  - `dot(a, b)`
  - `normalize(a)`

Rzut prostopadły wektora na prostą

- *Rzut (projekcja)* wektora $\boldsymbol{a}$ na prostą jest wektor $\boldsymbol{a}'$, którego początkiem jest rzut początku wektora $\boldsymbol{a}$ na prostą, a końcem — rzut końca wektora $\boldsymbol{a}$ na tę prostą.
- $|e| = 1$, wówczas $\boldsymbol{a}' = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$



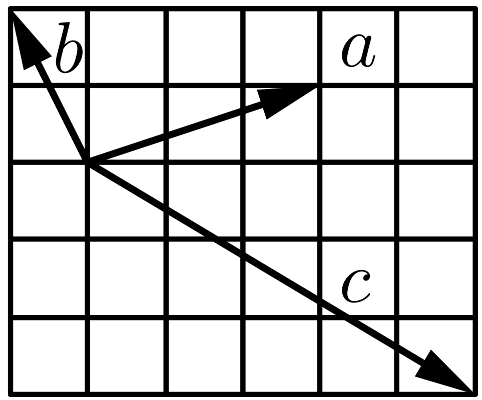
- $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$
  - $\boldsymbol{c} \perp (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$
  - $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\varphi$
  - $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) > 0$
- Pole równoległoboku

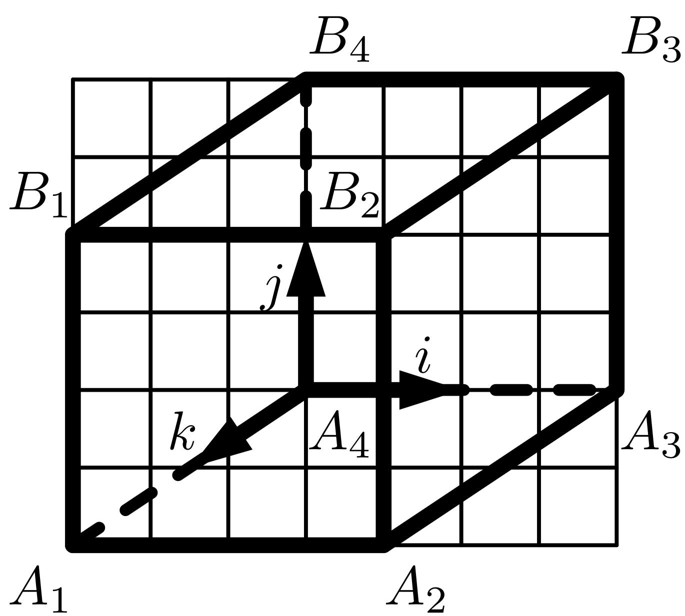


- $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$
- $(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$
- $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$
- OpenGL (GLSL): `cross(a, b)`

- Niech $|\boldsymbol{c}| = 1$
- Mnożenie wektorowe przez $\boldsymbol{c}$ działa na płaszczyźnie prostopadłej do $\boldsymbol{c}$ jak obrót o $\frac{\pi}{2}$

- Niech dane będą trzy niezerowe, niekomplanarne wektory $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$. Wtedy każdy wektor $\boldsymbol{a}$ może zostać jednoznacznie przedstawiony jako suma $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e_2} + z\boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- Wektory $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$ nazywane są *bazą* przestrzeni wektorów.
- Liczby x, y, z nazywane są *współrzędnymi* wektora $\boldsymbol{a}$ w bazie $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$.
- $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, z)$

- 
b
a
c

- 
B_4
B_3
B_1
B_2
j
i
k
A_4
A_3
A_1
A_2

Działania liniowe na wektorach

- Niech dana będzie baza $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$

☐ $$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a \pm x_b \\ y_a \pm y_b \\ z_a \pm z_b \end{pmatrix}$$

☐ $$\lambda \boldsymbol{a} = \lambda \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_a \\ \lambda y_a \\ \lambda z_a \end{pmatrix}$$

- Baza kartezjańska: $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$
  - $|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = 1$
  - $\boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{j} \perp \boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{i}$
  - $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) > 0$
- $\boldsymbol{a} = x_a\boldsymbol{i} + y_a\boldsymbol{j} + z_a\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{i})\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{a}\boldsymbol{j})\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{a}\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}$

- $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = 1$
- $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{kj} = \boldsymbol{ik} = 0$
  - $\boldsymbol{ab} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$
- $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$
- $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$
- $\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}$
  - $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left(\begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \right)$
  - $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$

- Niech dane będą dwie bazy: $\mathcal{E} = \{\, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3} \,\}$ oraz $\mathcal{F} = \{\, \boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3} \,\}$. Wtedy
  - Wektory $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ mają jednoznaczne rozłożenie po bazie $(\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3})$: $\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = a_{11}\boldsymbol{f_1} + a_{21}\boldsymbol{f_2} + a_{31}\boldsymbol{f_3}, \\ \boldsymbol{e}_2 = a_{12}\boldsymbol{f_1} + a_{22}\boldsymbol{f_2} + a_{32}\boldsymbol{f_3}, \\ \boldsymbol{e}_3 = a_{13}\boldsymbol{f_1} + a_{23}\boldsymbol{f_2} + a_{33}\boldsymbol{f_3}. \end{cases}$
  - $\begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f_1} & \boldsymbol{f_2} & \boldsymbol{f_3} \end{pmatrix} A$, gdzie A jest macierzą kolumn współrzędnych wektorów $\mathcal{E}$ w bazie $\mathcal{F}$
  - wektor $\boldsymbol{a}$ w bazie $\mathcal{F}$ będzie miał współrzędne $A \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$, gdzie $\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$ — jego współrzędne w $\mathcal{E}$.
  - A nazywa się macierzą przejścia od $\mathcal{E}$ do $\mathcal{F}$ (zmiany bazy)

- $\begin{pmatrix}\boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{f_1} & \boldsymbol{f_2} & \boldsymbol{f_3}\end{pmatrix} A \iff \begin{pmatrix}\boldsymbol{f_1} & \boldsymbol{f_2} & \boldsymbol{f_3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3}\end{pmatrix} A^{-1}$, gdzie A^{-1} jest macierzą odwrotną.
- Jeżeli obie bazy są kartezjańskie, to macierz przejścia jest *ortogonalna*
  - wektory-kolumny są jednostkowe i wzajemnie prostopadłe
    - to samo dotyczy wierszy
  - dla macierzy ortogonalnych $A^{-1} = A^t$

- Niech dane będą: układ wektorów $\mathcal{E} = \{\, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3} \,\}$ oraz baza $\mathcal{F} = \{\, \boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3} \,\}$, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f_1} & \boldsymbol{f_2} & \boldsymbol{f_3} \end{pmatrix} A$.
  - *przekwształceniem liniowym* nawyza się odwzorowanie
    $$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \mapsto x_a\boldsymbol{e_1} + y_a\boldsymbol{e_2} + z_a\boldsymbol{e_3}$$
  - współrzędne wektora $\boldsymbol{a}$ po przekształceniu będą równe $A \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$
  - A nazywa się *macierzą* przekształcenia
  - wynik przekształcenia zapisuje się $A\boldsymbol{a}$

Przekształcenia liniowe. Uwagi

- macierz A składa się z kolumn — współrzędnych układu $\mathcal{E}$ w bazie $\mathcal{F}$
- macierz A składa się z kolumn — współrzędnych wektorów bazy $\mathcal{F}$ po przekształceniu
- jeżeli macierz A jest odrwacalną, to $\mathcal{E}$ też jest bazą oraz przekształcenie liniowe zgada się z zamianą bazy $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$
- przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy

  1. dla dowolnych dwóch wektorów $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ spełniono $\phi(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \phi(\boldsymbol{a}) + \phi(\boldsymbol{b})$
  2. dla dowolnego wektoru $\boldsymbol{a}$ oraz dowolnej liczby rzeczywistej λ spełniono $\phi(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\phi(\boldsymbol{a})$

- Niech dane będą dwie bazy: $\mathcal{E} = \{ \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3} \}$ oraz $\mathcal{F} = \{ \boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3} \}$, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f_1} & \boldsymbol{f_2} & \boldsymbol{f_3} \end{pmatrix} T$
- Niech przekształcenie liniowe będzie dane w bazie $\mathcal{E}$ macierzą A
- Wtedy w bazie $\mathcal{F}$ to przekształcenie dane będzie macierzą TAT^{-1}

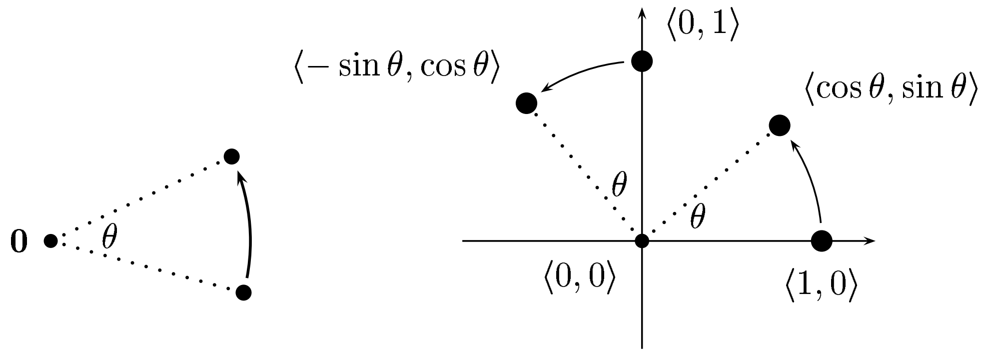


Figure II.5: Effect of a rotation through angle θ. The origin $\mathbf{0}$ is held fixed by the rotation.

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Skalowanie

$$S_{\lambda_1,\lambda_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Mnożenie przekształceń

- Niech dane będą dwa przekształcenia liniowe: A oraz B
- Iloczynem (superpozycją) przekształceń $A \circ B$ jest przekształcenie *liniowe* $AB(\boldsymbol{a}) = A(B\boldsymbol{a})$
  - Macierzą $A \circ B$ jest macierz AB
    - Dlatego zamiast $A \circ B$ będziemy pisać AB
- Macierzą przekształcenia odwrotnego do A jest macierz A^{-1}

Twierdzenie 1. *Każde przekształcenie liniowe można rozłożyć w iloczyn obrotu oraz skalowania (o różnych współczynnikach)*

Twierdzenie 2. *Każde przekształcenie liniowe* sztywne, *które nie zmienia orientacji, jest obrotem*

Obrót 3D

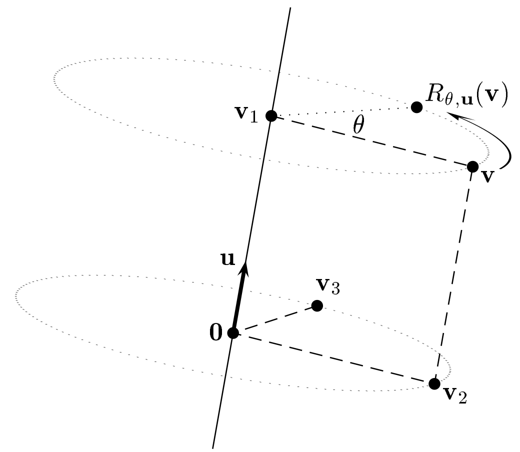


Figure II.14: The vector $\mathbf{v}$ being rotated around $\mathbf{u}$. The vector $\mathbf{v}_1$ is $\mathbf{v}$'s projection onto $\mathbf{u}$. The vector $\mathbf{v}_2$ is the component of $\mathbf{v}$ orthogonal to $\mathbf{u}$. The vector $\mathbf{v}_3$ is $\mathbf{v}_2$ rotated 90° around $\mathbf{u}$. The dashed line segments in the figure all meet at right angles.

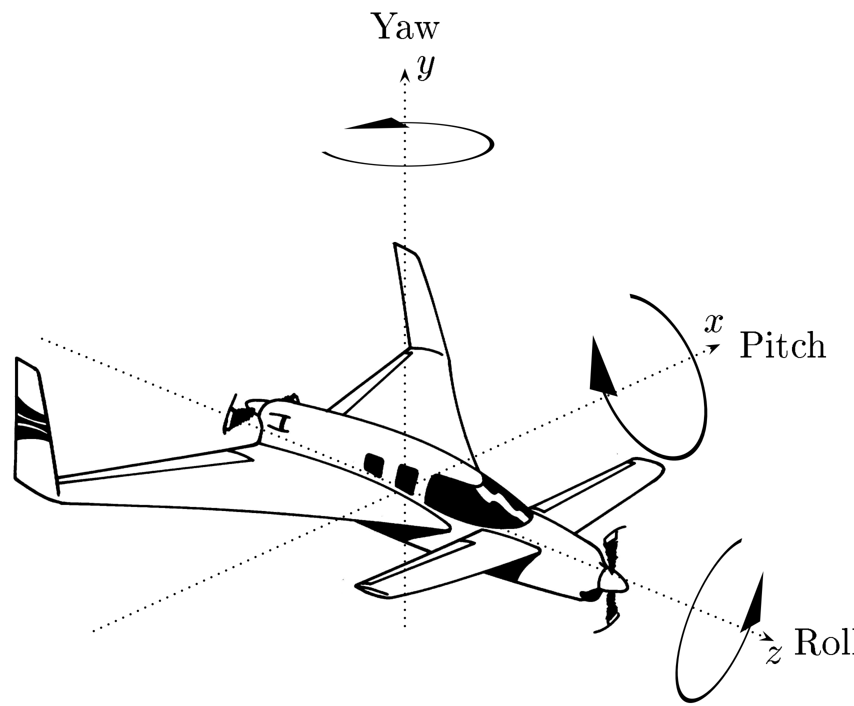
- Obrót dookoła osi wychodzącej z początku układu współrzędnych w kierunku $u = (u_1, u_2, u_3)$ o kąt θ stopni.

$$\begin{pmatrix} (1-c)u_1^2 + c & (1-c)u_1u_2 - su_3 & (1-c)u_1u_3 + su_2 \\ (1-c)u_1u_2 + su_3 & (1-c)u_2^2 + c & (1-c)u_2u_3 - su_1 \\ (1-c)u_1u_3 - su_2 & (1-c)u_2u_3 + su_1 & (1-c)u_3^2 + c \end{pmatrix},$$

gdzie $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$.

- Obrót odwzorowujący osie $x \mapsto y \mapsto z \mapsto u$

Kąty Eulera: odchylenie, pochylenie, przechylenie



- $R = R_{\theta_y,j} R_{\theta_p,i} R_{\theta_r,k}$

Macierze obrotów Eulera

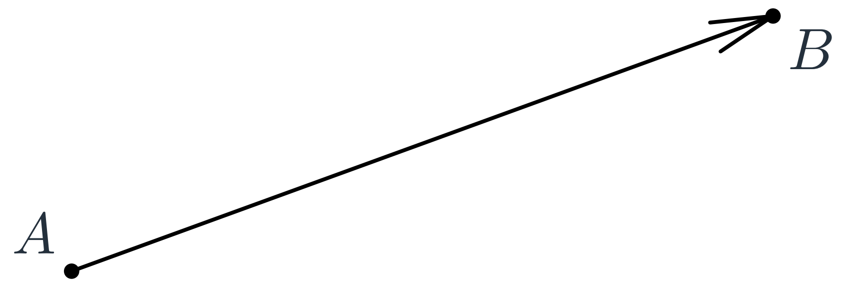
- $R_{\theta_p,i}$
- $R_{\theta_y,j}$
- $R_{\theta_r,k}$

$$S_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Przestrzeń afiniczna $\mathbb{R}^3$

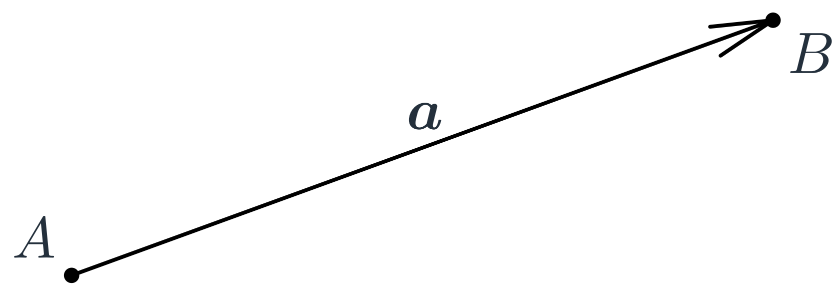
Odejmowanie punktów

- *Różnicą* punktów B i A jest wektor $\overrightarrow{AB}$.



- $B - A = \overrightarrow{AB}$
- $A = B \iff B - A = \mathbf{0}$
- $(B - A) + (C - B) = (C - A) = \overrightarrow{AC}$

- Sumą punktu A oraz wektora $\boldsymbol{a}$ jest punkt B, który zgadza się z końcem wektora $\boldsymbol{a}$, jeżeli początek tego wektora umieścić w A.



- $B = A + \overrightarrow{AB}$
- $(A + \boldsymbol{a_1}) + \boldsymbol{a_2} = A + (\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2})$
- Dodanie wektora nazywa się *przesunięciem róznoległym*

- Niech dany będzie układ punktów $\{ A_1, \ldots, A_k \}$ oraz wagi (liczby rzeczywiste) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, takie że $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$
- Ustalmy dowolny punkt O
- *Kombinacją afiniczną* punkitów $\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_k A_k$ jest punkt $O + \alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \cdots + \alpha_k \overrightarrow{OA_k}$

Twierdzenie 3. *Kombinacja afiniczna punktów nie zależy od wyboru punktu O*

- Wybierzmy dowolny punkt O, *początek układu*
- Przez ten punkt poprowadźmy trzy niekomplanarne proste: Ox, Oy, Oz, *osie współrzędnych*
- Płaszczyzny współrzędnych Oxy, Oxz, Oyz
- Na osiach wyznaczymy niezerowe wektory: odpowiednio $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$ —*bazę*.
- Dla każdego punktu A wektor $\overrightarrow{OA}$ ma jednoznaczne przedstawienie $\overrightarrow{OX} = x\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e_2} + z\boldsymbol{e_3}$
  - liczby x, y, z — *współrzędne* punktu A
- układ jest *prawym (dodatnim)*, jeżeli $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ jest zorientowany dodatnio
- układ jest *lewym (ujemnym)*, jeżeli $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ jest zorientowany ujemnie
- kierunki na osiach, zorientowane zgodnie z wektorami bazy, nazywają się *dodatnimi*. Kierunki przeciwne — *ujemnymi*

Układ współrzędnych kartezjańskich

- Układ współrzędnych nazywa się *kartezjańskim, jeżeli*
  - osie są wzajemnie prostopadłe
  - wektory $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$ są jednostkowe (mają jednostkową długość).
- Dalej w prezentacji prawie zawsze układ będzie prawym kartezjańskim układem
- Dla wektorów bazy układu kartezjańskiego czasami stosuje się oznaczenia $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$

- Odejmowanie punktów:
  - $A_2 - A_1 = \overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$
- Dodanie wektora:
  - $A_1 + \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x_1 + x_a \\ y_1 + y_a \\ z_1 + z_a \end{pmatrix}$
- Kombinacja afiniczna:
  - $\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_k A_k = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k \\ \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_k y_k \\ \alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_k z_k \end{pmatrix}$
- wzory są prawidłowe w każdym układzie

Podział odcinka w danym stosunku

- Dane są dwa punkty $A_1(x_1, y_1, z_1)$ oraz $A_2(x_2, y_2, z_2)$
- Znaleźć punkt $A(x, y, z)$, który dzieli odcinek A_1A_2 w stosunku $\lambda_1 : \lambda_2$
  - $\lambda_2\overrightarrow{A_1A} - \lambda_1\overrightarrow{AA_2} = 0$
  - $\overrightarrow{OA} = \frac{\lambda_2\overrightarrow{OA_1}+\lambda_1\overrightarrow{OA_2}}{\lambda_1+\lambda_2}$
  - $x = \frac{\lambda_2 x_1+\lambda_1 x_2}{\lambda_1+\lambda_2}$, $y = \frac{\lambda_2 y_1+\lambda_1 y_2}{\lambda_1+\lambda_2}$, $z = \frac{\lambda_2 z_1+\lambda_1 z_2}{\lambda_1+\lambda_2}$.
- wzory są prawidłowe w każdym układzie

Odległość między punktami

- Dane są dwa punkty $A_1(x_1, y_1, z_1)$ oraz $A_2(x_2, y_2, z_2)$
  - $|A_1A_2|^2 = \overrightarrow{A_1A_2}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$
- wzory są prawidłowe tylko w układzie kartezjańskim

- Niech dane będą dwa ogólne układy współrzędnych: $(O, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ oraz $(O', \boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3})$
- Punkt P ma współrzędne (x, y, z) względem jednego układu oraz (z', y', z') względem drugiego.
- Wektory $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ mają jednoznaczne rozłożenie po bazie $(\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3})$: $\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = a_{11}\boldsymbol{f_1} + a_{21}\boldsymbol{f_2} + a_{31}\boldsymbol{f_3}, \\ \boldsymbol{e}_2 = a_{12}\boldsymbol{f_1} + a_{22}\boldsymbol{f_2} + a_{32}\boldsymbol{f_3}, \\ \boldsymbol{e}_3 = a_{13}\boldsymbol{f_1} + a_{23}\boldsymbol{f_2} + a_{33}\boldsymbol{f_3}. \end{cases}$
  - $\begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f_1} & \boldsymbol{f_2} & \boldsymbol{f_3} \end{pmatrix} A$
- Punkt O w nowym układzie ma współrzędne (x_0, y_0, z_0).
- Wówczas $\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + x_0, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + y_0, \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + z_0. \end{cases}$
- $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$

- Niech dany będzie układ współrzędnych $O, \boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3}$ oraz punkt O' i układ wektorów $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$
  - *przekwształceniem afinicznym* nawyza się odwzorowanie
  $$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto O' + x\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e_2} + z\boldsymbol{e_3}$$
  - współrzędne punktu A po przekształceniu będą równe
  $$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$, gdzie
    - $\begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f_1} & \boldsymbol{f_2} & \boldsymbol{f_3} \end{pmatrix} A$
    - (x_0, y_0, z_0) — współrzędne wektora $\overrightarrow{OO'}$

- Jeżeli układ wektorów $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ jest bazą, to przekształcenie afiniczne zgadza się z zamianą układu współrzędnych
- Przekwsztalcenie afiniczne B składa się z przekształcenia linowego A i przesunięcia równoległego T_u, $B = T_u \circ A$
  - Wówczas przesunięcie T_u oraz przekształcenie liniowe A określone są jednoznacznie.

Twierdzenie 4. *Każde przekształcenie afiniczne można rozłożyć w iloczyn obrotu, skalowania (o różnych współczynnikach) oraz przesunięcia równoległego*

Twierdzenie 5. *Każde przekształcenie afiniczne* sztywne, *które nie zmienia orientacji, jest obrotem (afnicznym) lub przesunięciem równoległym*

- Obrót o 90° dookoła punktu $(2, 3)$ na płaszczyźnie

- Trójka liczb $x, y, w \in \mathbb{R}$ ($w \neq 0$) reprezentuje punkt o współrzędnych $(x/w, y/w) \in \mathbb{R}^2$.
- $(2, 1) \sim (2 : 1 : 1) \sim (6 : 3 : 3) \sim (-2 : -1 : -1)$

Współrzędne jednorodne w $\mathbb{R}^3$

- Czwórka liczb $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ ($w \neq 0$) reprezentuje punkt o współrzędnych $(x/w, y/w, z/w) \in \mathbb{R}^3$.
- $(2, 1, 1) \sim (2 : 1 : 1 : 1) \sim (6 : 3 : 3 : 3) \sim (-2 : -1 : -1 : -1)$

- Niech $B = T_u \circ A$ będzie przekształceniem afinicznym,
  $$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$
- Macierzą przekształcenia B nazywa się macerz
  $$M_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  - $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + u_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + u_2 \end{pmatrix}$$
  - $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + u_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + u_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{\lambda_1,\lambda_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{u_1,u_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + u_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + u_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + u_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Przesunięcie o wektor $u = (u_1, u_2, u_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Obrót dookoła osi wychodzącej z początku układu współrzędnych w kierunku $u = (u_1, u_2, u_3)$ o kąt θ stopni. Kierunek obrotu określany jest orientacją.

$$\begin{pmatrix} (1-c)u_1^2 + c & (1-c)u_1u_2 - su_3 & (1-c)u_1u_3 + su_2 & 0 \\ (1-c)u_1u_2 + su_3 & (1-c)u_2^2 + c & (1-c)u_2u_3 - su_1 & 0 \\ (1-c)u_1u_3 - su_2 & (1-c)u_2u_3 + su_1 & (1-c)u_3^2 + c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

gdzie $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$.

- $$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — symetria względem płaszczyzny $y - z$.

Jednorodność macierzy przekształcenia afinicznego

- Macierze A oraz λA określają to samo przekształcenie afiniczne.

Macierz superpozycji przekształceń

- Niech dane będą dwa przekształcenia afiniczne: A oraz B
- iloczynem (superpozycją) przekształceń $A \circ B$ jest przekształcenie *afiniczne* $AB(\boldsymbol{a}) = A(B\boldsymbol{a})$
  - Macierzą $A \circ B$ jest macierz AB
    - Dlatego zamiast $A \circ B$ będziemy pisać AB
- Macierzą przekształcenia odwrotnego do A jest macierz A^{-1}

- Wektory i punkty są zapisywane jako wiersze $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$, $P = (x : y : x : w)$
- Mnożenie przez macierz przekształcenia po prawej stronie $\begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} M$, $\begin{pmatrix} x & y & z & w \end{pmatrix} A$
- Macierze są zamieniane na transponowane:
  - przesunięcie o wektor $u = (u_1, u_2, u_3)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 1 \end{pmatrix},$$

    etc
- Mnożenie macierzy w innej kolejności
  - Macierzą $A_1 \circ A_2$ będzie $A_2 A_1$

Przestrzeń rzutowa $\mathbb{RP}^3 \star$

- Składa się z czwórek współrzędnych $(x : y : z : w)$ — współrzędnych jednorodnych
  - w może być zerem
- Dwie proporcjonalne czwórki reprezentują ten sam punkt:

$$(x_1 : y_1 : z_1 : w_1) \sim (x_2 : y_2 : z_2 : w_2) \iff \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{w_1}{w_2}$$

- Przekształceniem rzutowym (projektywicznym) nazywa się przekształcenie

$$\mathbb{RP}^3 \to \mathbb{RP}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix},$$

gdzie A jest dowolną 4×4 macierzą, przy czym $\det A \neq 0$