Grafika Komputerowa

Krzywe B-sklejane

Alexander Denisjuk

`denisjuk@pjwstk.edu.pl`

Polsko-Japońska Wyższa Szkoła Technik Komputerowych

zamiejscowy ośrodek dydaktyczny w Gdańsku

ul. Brzegi 55

80-045 Gdańsk

Krzywe B-sklejane

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

http://users.pjwstk.edu.pl/~denisjuk/

Krzywa B-sklejana (B-spline)

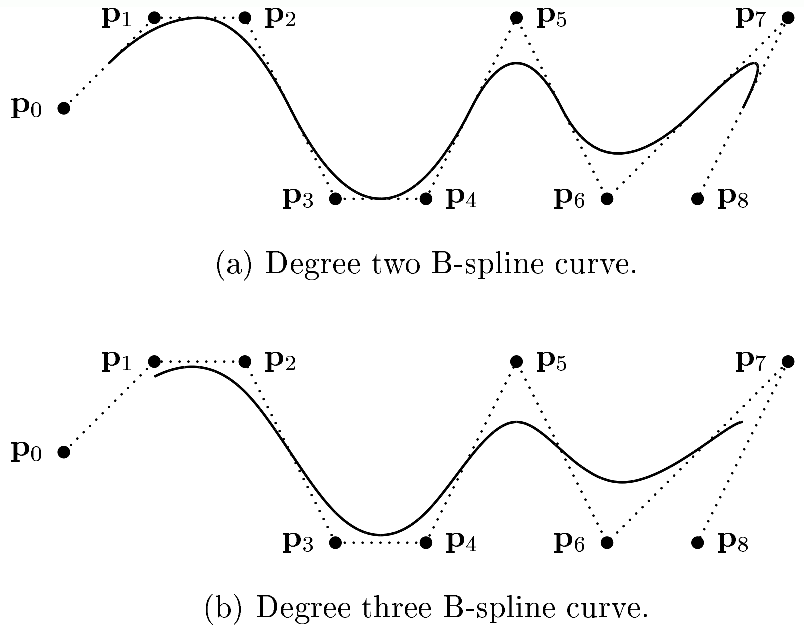


Figure VIII.1: Degree two and degree three B-spline curves with uniformly spaced knots and nine control points. The degree three curve is smoother than the degree two curve, whereas, the degree two curve approaches the control points a little more closely. Compare with the degree eight Bézier curve of figure VII.9(c) on page 167.

Krzywa B-sklejana trzeciego stopnia

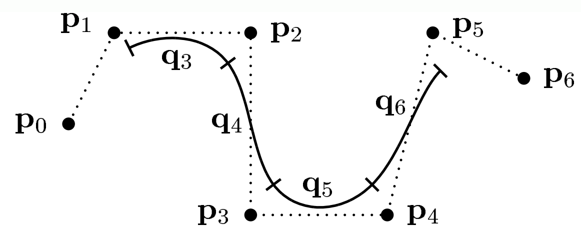


Figure VIII.2: A degree three uniform B-spline curve with seven control points.

$$q(u) = \sum_{i=0}^{n} N_i(u) p_i, \quad 3 \leq u \leq n+1$$

$N_i(u) = 0$ dla $u \leq i$ lub $u \geq i+4$

Funkcje wagowe

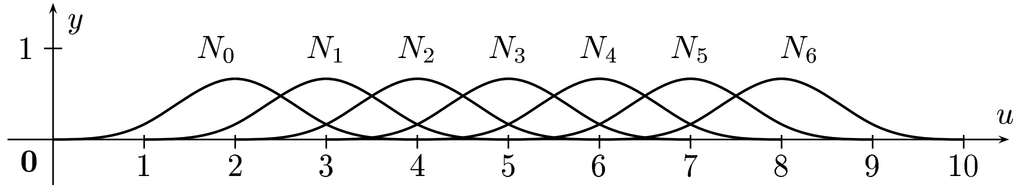


Figure VIII.3: The blending functions for a uniform, degree three B-spline. Each function N_i has support $(i, i+4)$.

- $N_i(u) = N_0(u - i)$
- Obcięte wielomiany stopnia 3
- $N_i \in C^2$
- $\sum_i N_i(u) = 1$ dla $u \in [3, n+1]$
- $N_i(u) \geq 0$
- $N_i(u) = 0$ dla $u \leq i$ lub $u \geq i + 4$

Funkcje wagowe

$$R_0(u) = N_0(u), \quad R_1(u) = N_0(u+1), \quad R_2(u) = N_0(u+2),$$

$$R_3(u) = N_0(u+3) \quad u \in [0,1]$$

$$\Downarrow$$

$$R_0(u) = \frac{1}{6}u^3 \quad R_1(u) = \frac{1}{6}(-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1)$$

$$R_2(u) = \frac{1}{6}(3u^3 - 6u^2 + 4) \quad R_3(u) = \frac{1}{6}(1-u)^3$$

Funkcje wagowe

$$
\begin{array}{ccc}
R_0(0) = 0, & R_0'(0) = 0, & R_0''(0) = 0, \\
R_0(1) = \frac{1}{6} = R_1(0), & R_0'(1) = \frac{1}{2} = R_1'(0), & R_0''(1) = 1 = R_1''(0), \\
R_1(1) = \frac{2}{3} = R_2(0), & R_1'(1) = 0 = R_2'(0), & R_1''(1) = -2 = R_2''(0), \\
R_2(1) = \frac{1}{6} = R_3(0), & R_2'(1) = -\frac{1}{2} = R_3'(0), & R_2''(1) = 1 = R_3''(0), \\
R_3(1) = 0, & R_3'(1) = 0, \quad R_3''(0) = 0. &
\end{array}
$$

Krzywa B-sklejana niejednorodna

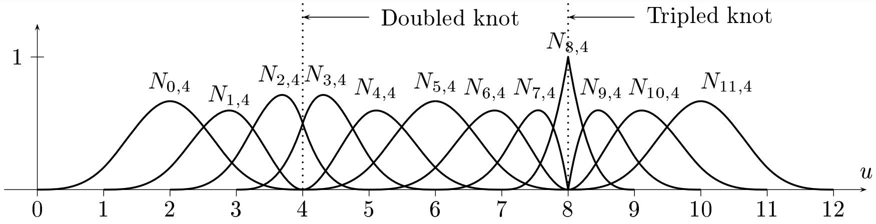


Figure VIII.4: Example of order four (degree three) blending functions with repeated knots. The knot vector is $[0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 11, 12]$ so that the knot 4 has multiplicity two and the knot 8 has multiplicity three.

- węzły $u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_{l-1} \leq u_l$
- węzły wielokrotne $u_{i-1} \leq u_i = u_{i+1} \leq u_{i+2}$

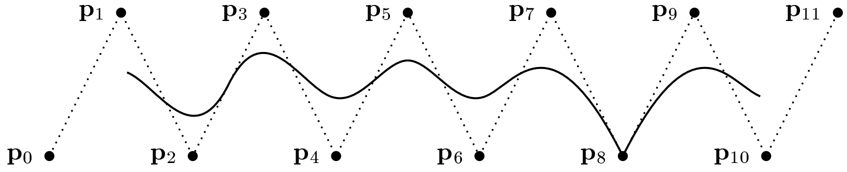


Figure VIII.5: Example of an order four B-spline created with repeated knots. This curve is created with the knot vector and blending functions shown in figure VIII.4. It has domain $[3, 9]$.

Krzywa B-sklejana stopnia $m-1$ (Cox de Boor)

- Dane są węzły $u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_{l-1} \leq u_l$.
- Dla $i = 0, 1, \ldots, l-1$ wagi $N_{i,1} = \begin{cases} 1 & u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \end{cases}$
- $N_{i,k+1}(u) = \frac{u-u_i}{u_{i+k}-u_i} N_{i,k}(u) + \frac{u_{i+k+1}-u}{u_{i+k+1}-u_{i+1}} N_{i+1,k}(u)$
- $0/0 = 0$, $(a/0) \cdot 0 = 0$
- $N_{i,m}$ jest obciętym (w węzłach) wielomianem stopnia $m-1$
- $\operatorname{supp} N_{i,m} = [u_i, u_{i+m}]$ jest obciętym (w węzłach) wielomianem stopnia $m-1$
- $N_{i,m}$ zależy tylko od $u_i, \ldots, u_{i+m}$

Przykład. Węzły jednorodne, $m = 2$

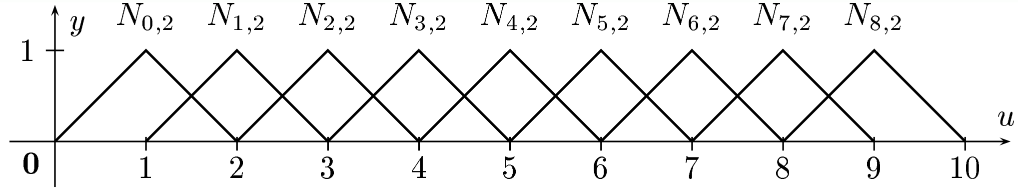


Figure VIII.6: The order two (piecewise degree one) blending functions with uniformly spaced knots, $u_i = i$. Here $\ell = 10$, and there are $\ell + 1$ knots and $\ell - 1$ blending functions. The associated B-spline curve of equation (VIII.2) is defined for $1 \le u \le \ell - 1$.

$$N_{0,2} = \begin{cases} u & 0 \le u \le 1, \\ 2 - u & 1 \le u \le 2, \\ 0 & \end{cases}$$

Przykład. Węzły jednorodne, $m = 3$

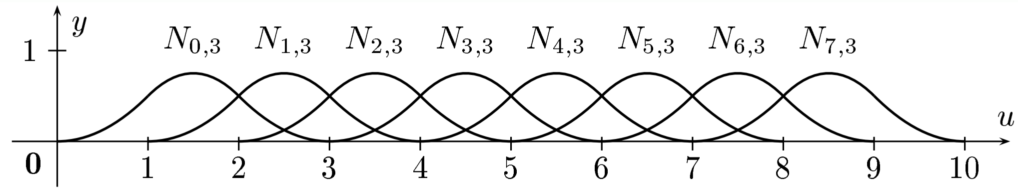


Figure VIII.7: The order three (piecewise degree two) blending functions with uniform knot positions $u_i = i$. We still have $\ell = 10$; there are $\ell + 1$ knots and $\ell - 2$ blending functions. The associated B-spline curve of equation (VIII.3) is defined for $2 \le u \le \ell - 2$.

- $$N_{0,3} = \begin{cases} \frac{1}{2}u^2 & 0 \le u < 1, \\ \frac{1}{2}u(2-u) + \frac{1}{2}(3 - u(u-1) & 1 \le u < 2, \\ \frac{1}{2}(3-u)^2 & 2 \le u < 3, \\ 0 & \end{cases}$$

Przykład. Węzły jednorodne, $m = 4$

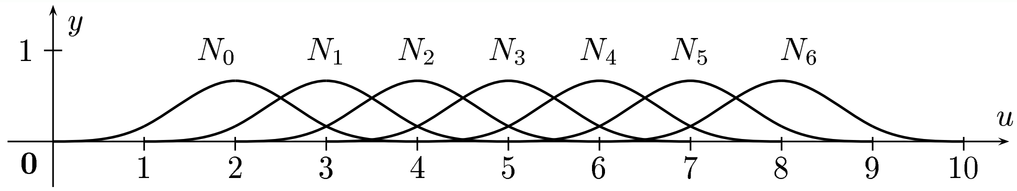


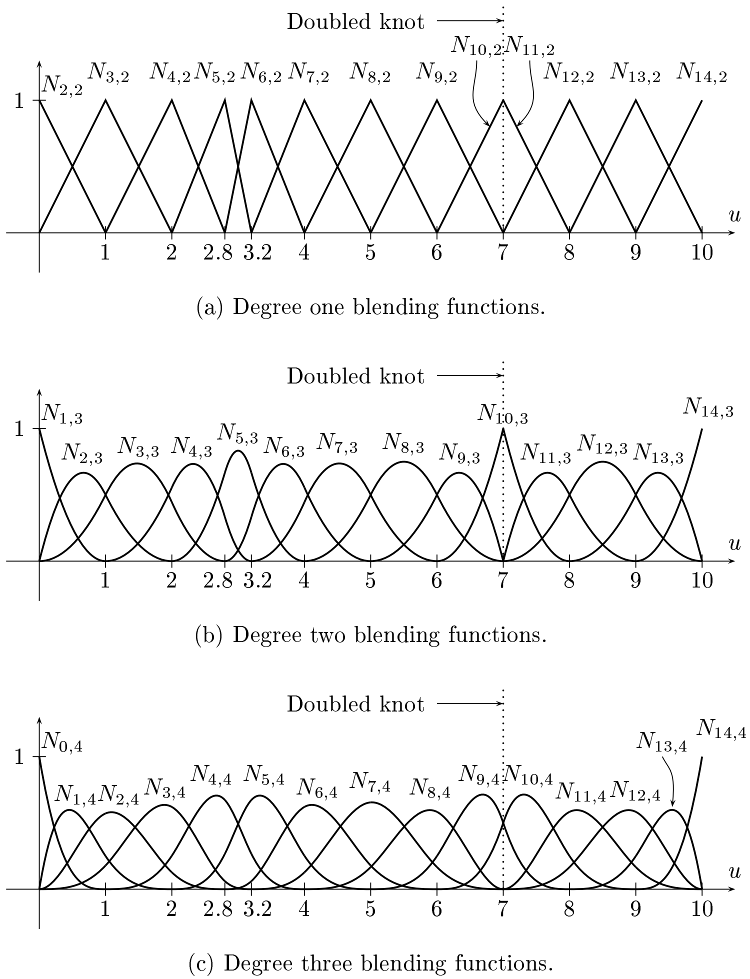
Figure VIII.3: The blending functions for a uniform, degree three B-spline. Each function N_i has support $(i, i+4)$.

Przykład. Krzywe Béziera

- węzły: $0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1$
- $N_{3,1}(u) = \begin{cases} 1, & 0 \le u \le 1 \\ 0 \end{cases}$
- $N_{i,1} = 0$ dla $i \neq 3$
- $N_{2,2}(u) = 1 - u$, $N_{3,2}(u) = u$
- $N_{1,3}(u) = (1-u)^2$, $N_{2,3}(u) = 2u(1-u)$, $N_{3,3}(u) = u^2$
- $N_{0,4}(u) = (1-u)^3$, $N_{1,4}(u) = 3u(1-u)^2$,
  $N_{2,4}(u) = 3u^2(1-u)$, $N_{3,4}(u) = u^3$

Niejednorodne wielokrotne węzły

- węzły: $0, 0, 0, 0, 1, 2, 2\frac{4}{5}, 3\frac{1}{5}, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10$



(a) Degree one blending functions.

(b) Degree two blending functions.

(c) Degree three blending functions.

Właściwości

Twierdzenie 1. *Niech dane będą węzły* $u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_l$. *Wtedy funkcje wagowe* $N_{i,m}(u)$ *dla* $0 \leq i \leq l - m$ *mają następujące właściwośi:*

- $\operatorname{supp} N_{i,m} = [u_i, u_{i+m}]$ *dla* $m \geq 1$
- $N_{i,m} \geq 0$
- $\sum_{i=0}^{l-m} N_{i,m}(u) = 1$ *dla* $u_{m-1} \leq u \leq u_{l-m+1}$

Właściwości

Twierdzenie 2. *Niech dane będą węzły* $u_0 \le u_1 \le \cdots \le u_l$. *Wtedy funkcje wagowe* $N_{i,m}(u)$ *dla* $0 \le i \le l-m$ *mają następujące właściwośi:*

- $\operatorname{supp} N_{i,m} = [u_i, u_{i+m}]$ *dla* $m \ge 1$
- $N_{i,m} \ge 0$
- $\sum_{i=0}^{l-m} N_{i,m}(u) = 1$ *dla* $u_{m-1} \le u \le u_{l-m+1}$

$$q(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,m}(u) p_i, \quad u_{m-1} \le u \le u_{l-m+1} = u_{n+1}$$

$$q(u) = \sum_{i=j-m+1}^{j} N_{i,m}(u) p_i, \quad u_j \le u \le u_{j+1}$$

Właściwości

Twierdzenie 3. *Niech $q(u)$ będzie krzywą B-sklejaną stopnia $m-1$ i węzeł u_i ma krotność μ. Wtedy $q(u)$ ma ciągłe pochodne do stopnia $m-\mu-1$ w punkcie u_i.*

Wymierne B-sklejane krzywe (NURBS)

$p_i = (x : y : z : w)$,

$$q(u) = \sum_i N_{i,m}(u) p_i$$

- współrzędna w pozwala na powiększenie wagi punktu kontrolnego
- modelowanie krzywych stożkowych
- rzut perspektywiczny krzywej wymiernej jest zawsze krzywą wymierną
- punkty kontrolne mogą być umieszczone w nieskończoności

NURBS w openGL (GLU)

```
 GLUnurbsObj * curve1;
curve1 = gluNewNurbsRenderer();
gluBeginCurve(curve1);
  gluNurbsCurve(curve1,numKnots,knotData,
  stride,data,degParam,GL_MAP1_VERTEX_3);
gluEndCurve(curve1);
```

NURBS w openGL (GLU)

```
GLfloat knotVector[8] =
        {0.0,0.0,0.0,0.0,1.0,1.0,1.0,1.0};
GLfloat ctrlPts[4][3] = {{-4.0,1.0,0.0},
  {-2.0,5.0,0.0},{3.0,-4.0,0.0},
                          {5.0,1.0,0.0}};
GLUnurbsObj * cubicBezCurve;
cubicBezCurve = gluNewNurbsRenderer();
gluBeginCurve(cubicBezCurve);
  gluNurbsCurve(cubicBezCurve,8,knotVector,
  3, &ctrlPts[0][0],4,GL_MAP1_VERTEX_3);
gluEndCurve(cubicBezCurve);
```

NURBS Powierzchnie

```
gluBeginSurface(surfName);
  gluNurbsSurface(surfName, nuKnots,
  uknotVector, nvKnots, vKnotVector,
  uStride,vStride, &ctrlPts[0][0][0],
  uDegParam,vDegParam,GL_MAP2_VERTEX_3);
gluEndSurface(surfName);
```