Analiza Matematyczna. Funkcje Tworzące

Aleksander Denisiuk
denisiuk@pjwstk.edu.pl
Polsko-Japońska Wyższa Szkoła Technik Komputerowych
Wydział Informatyki w Gdańsku
ul. Brzegi 55
80-045 Gdańsk

22 maja 2017

Funkcje Tworzące

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem
`http://users.pjwstk.edu.pl/~denisjuk/`

Definition

Definicja 1. Niech $a_0, a_1, a_2, \ldots$ będzie ciągiem. *Funkcją tworzącą ciągu* $\{ a_n \}$ nazywamy szereg potęgowy

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{1}$$

Działania na funkcjach tworzących

Definicja 2. Niech dane będą dwie funkcje tworzące: $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ i $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$.

1. *Sumą (różnicą)* funkcji tworzących nazywamy szereg
$$A(x) \pm B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) x^k.$$
2. *Iloczynem* funkcji $A(x)$ i liczby rzeczywistej λ nazywamy szereg
$$\lambda A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) x^k.$$
3. *Iloczynem (iloczynem Cauchy'ego) funkcji tworzących* nazywamy szereg $A(x) \cdot B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, gdzie

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0.$$

Funkcje tworzące a funkcje rzeczywiste

Uwaga 3. Jeżeli szereg (1) jest zbieżnym w otoczeniu zera, to funkcji tworzącej odpowiada funkcja rzeczywista, określona w tym samym otoczeniu zera. W tym przypadku działaniom, określonym w definicji 2, odpowiadają działania na funkcjach rzeczywistych. Szereg (1) jest rozwinięciem funkcji w szereg Maclaurina. Więc

$$a_k = \frac{A^{(k)}(0)}{k!}.$$

Przykłady funkcji tworzących

Przykład 4.

- $a_k = 1, \quad A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$
- $a_k = \frac{1}{k!}, \quad A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x.$
- $a_k = C_n^k, \quad A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k x^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = (1+x)^n.$
- $a_k = 2^k, \quad A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k = \frac{1}{1-2x}.$
- $a_k = k!, \quad A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k! x^k.$

Funkcje tworzące a kombinacje

$$(1+x)^n = \underbrace{(1+x)(1+x)\dots(1+x)}_{n \text{ razy}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k x^k$$

- Niech każdy czynnik $(1+x)$ odpowiada pewnemu elementowi a_i zbioru $X = \{ a_1, \dots, a_n \}$
- Każdy składnik sumy $(1+x)$ reprezentuje jedną z dwóch możliwości pojawienia się elementu a_i w podzbiorze X: zero razy: $x^0 = 1$, i jeden raz: $x^1 = x$.
- Podzbiór X jest jednoznacznie określony przez definicję ilości pojawienia się w nim każdego elementu, i. e. przez wybór jednego ze składników w każdym z czynników iloczynu $(1+x)\dots(1+x)$.
- Określony w ten sposób wybór da wkład do współczynnika przy x^k. Ilość k-elementowych podzbiorów X jest równa C_n^k.

Kombinacje z powtórzeniami

- Niech $X = \{ a_1, a_2, a_3, a_4 \}$.
- Oznaczmy przez c_k ilość k-kombinacji z powtórzeniami, w których a_1 może występować co najwyżej dwa razy, a_2 — trzy, a_3 — jeden, zaś a_4 — cztery razy.
- Funkcja tworząca dla ciągu c_k jest

$$
\begin{aligned}
C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \\
&= (1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x)\times \\
&\quad \times (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = \\
&= 1 + 4x + 9x^2 + 15x^3 + 20x^4 + 22x^5 + 20x^6 + 15x^7 + \\
&\quad + 9x^8 + 4x^9 + x^{10}.
\end{aligned}
$$

Kombinacje z powtórzeniami — II

- Dobierając i-ty czynnik można nakładać dowolne ograniczenia na ilość wchodzeń elementu a_i.
- Na przykład, jeżeli element a_i może występować 0, 3 lub 7 razy, czynnik ma postać $1 + x^3 + x^7$;
- jeżeli a_i może występować dowolną parzystą liczbę razy, czynnik jest równy $1 + x^2 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x^2}$.

Kombinacje z powtórzeniami — III

- W szczególności, jeżeli każdy z elementów zbioru $X = \{ a_1, a_2, \ldots a_n \}$ może się pojawić w kombinacji dowolną ilość razy, funkcja tworząca będzie równa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \bar{C}_n^k x^k =$$

$$= \underbrace{(1 + x + x^2 + \ldots) \ldots (1 + x + x^2 + \ldots)}_{n \text{ razy}} = \frac{1}{(1-x)^n}.$$

- Różniczkując k razy, otrzymamy

$$\frac{d^k}{dx^k} \frac{1}{(1-x)^n} = n(n+1) \ldots (n+k-1) \frac{1}{(1-x)^{n+k}}.$$

- Więc $\bar{C}_n^k = \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!} = C_{n+k-1}^k.$

Liczby Fibonacciego

Definicja 5.

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1,$$
$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots.$$

- Oto początek ciągu Fibonacciego: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34.$
- Funkcja tworząca $F(x)$ dla ciągu F_k spełnia równanie

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k = 0 + x + \sum_{k=2}^{\infty} (F_{k-2} + F_{k-1}) x^k =$$
$$= x + x^2 \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-2} x^{k-2} + x \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-1} x^{k-1} =$$
$$= x + x^2 F(x) + xF(x) = x + (x^2 + x)F(x),$$

- skąd $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$.

Jawny wzór na liczby Fibonacciego

- Przedstawmy $F(x)$ jako sumę ułamków najprostszych
- $(1-x-x^2) = \left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right),$
- $\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{A}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{B}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x},$
- $\begin{cases} A\frac{1-\sqrt{5}}{2} + B\frac{1+\sqrt{5}}{2} = -1, \\ A + B = 0, \end{cases}$
- $A = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$

Jawny wzór na liczby Fibonacciego — II

- $$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} - \frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k x^k - \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]x^k.$$
- Ostatecznie

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right].$$

Liczby Catalana

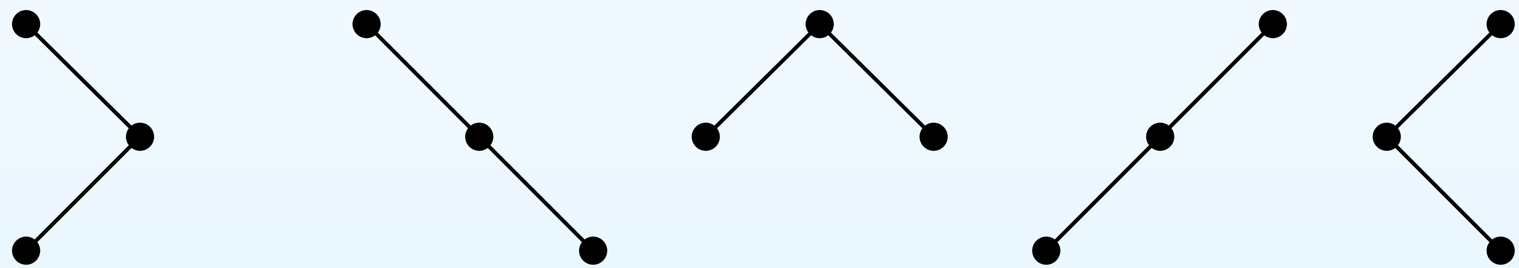
Definicja 6.

$$\begin{cases} c_0 = 1, \\ c_{k+1} = c_0c_k + c_1c_{k-1} + \cdots + c_{k-1}c_1 + c_kc_0 = \sum_{i=0}^{k} c_ic_{k-i}, \\ k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

- Oto początek ciągu liczb Catalana: $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132$
- Funkcja tworzącą: $C(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots$
- $C(x) = xC(x)C(x) + 1$.
- $C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.
- $c_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$.
- $c_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2}c_n$.

Drzewa binarne

Definicja 7. *Drzewem binarnym* o n wierzchołkach nazywa się *graf pusty*, jeżeli $n = 0$, oraz, przy $n > 1$ graf, mający wierzchołek k, nazywany *korzeniem*, *lewe poddrzewo* L o l wierzchołkach i *prawe poddrzewo* R o r wierzchołkach. Przy czym $l + r + 1 = n$.



Rysunek 1: Drzewa binarne o trzech wierzchołkach

Twierdzenie 8. *Ilość drzew binarnych o n wierzchołkach wynosi c_n.*

Zagadnienia, związane z liczbami Catalana