Analiza Matematyczna. Ciągi i szeregi funkcji

Aleksander Denisiuk
denisiuk@pjwstk.edu.pl
Polsko-Japońska Wyższa Szkoła Technik Komputerowych
Wydział Informatyki w Gdańsku
ul. Brzegi 55
80-045 Gdańsk

4 czerwca 2017

Ciągi i szeregi funkcji

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem
http://users.pjwstk.edu.pl/~denisjuk/

Ciągi funkcji

Definicja 1. Niech dany będzie zbiór $X \subset \mathbb{R}$.

1. Jeżeli każdej liczbę naturalnej $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ jest podporządkowana funkcja rzeczywista $f_n : X \to \mathbb{R}$, to zbiór numerowanych funkcji rzeczywistych $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots$ nazywa się *ciągiem funkcji.*
2. Funkcje f_n nazywają się *wyrazami ciągu* $\{ x_n \}$.
3. Zbiór X nazywa się *dziedziną* ciągu.

Przykład 2. 1. $f_n(x) = x^n$, $X = [0, 1]$.
2. $f_n(x) = \sin \frac{\pi x}{n}$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Zbieżność ciągu funkcji

Definicja 3. Niech dany będzie ciąg funkcji $f_n(x)$, określony na zbiorze X.

1. Ciąg nazywa się *zbieżnym w punkcie* $x_0 \in X$ do granicy g, jeżeli ciąg liczb $f_n(x_0)$ jest zbieżnym do g.
2. Ciąg nazywa się *zbieżnym na zbiorze* X do funkcji $g(x)$, jeżeli $\forall x \in X$ ciąg $f_n(x)$ jest zbieżnym do $g(x)$.
3. Ciąg nazywa się *zbieżnym jednostajnie* do funkcji $g(x)$, jeżeli $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, takie że $\forall n > N$, $\forall x \in X$ $|g(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Oznaczenie:

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} g(x).$$

Przyłady zbieżności

Przykład 4. 1. $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$

2. $f_n(x) = \sin\frac{\pi x}{n} \underset{n\to\infty}{\overset{x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}{\rightrightarrows}} 0.$

Kryterium Cauchy'ego jednostajnej zbieżności

Twierdzenie 5 (Kryterium Cauchy'ego)**.** *Niech dany będzie określony na zbiorze X ciąg funkcji $f_n(x)$. Na to, żeby ciąg ten był zbieżny jednostajnie potrzeba i wystarczy, żeby $\forall \varepsilon > 0$ istniał taki numer $N \in \mathbb{N}$, że $\forall n, m > N, \forall x \in X$ spełniała się nierówność $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.*

- Ciągi i szeregi funkcji
- Ciągi funkcji
- Szeregi funkcji
- Szeregi potęgowe

Jednostajna zbieżność ciągłych funkcji

Twierdzenie 6. *Niech dany będzie ciąg funkcji $f_n(x)$, ciągłych na zbiorze $X \subset \mathbb{R}$. Wtedy, jeżeli*

$$f_n \underset{n\to\infty}{\overset{x\in X}{\rightrightarrows}} g(x),$$

to $g(x)$ też jest funkcją ciągłą na zbiorze X.

Dowód. $|g(x) - g(x_0)| \leqslant$
$|g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - g(x_0)|$. □

Szeregi funkcji

Definicja 7. Niech dany będzie zbiór $X \subset \mathbb{R}$.

1. *Szeregiem funkcji* nazywa się formalna suma

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_k(x) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \tag{1}$$

gdzie $u_k(x) : X \to \mathbb{R}$ dla $k = 1, 2, \ldots$

2. Suma $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ nazywa się *sumą częściową* szeregu 1.

Zbieżność szeregów funkcji

Definicja 8. 1. Szereg 1 nazywa się *zbieżnym w punkcie* $x \in X$, jeżeli istnieje granica $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ ciągu sum częściowych w punkcie x przy $n \to \infty$.

2. Granica ta nazywa się *sumą* szeregu 1, oznaczenie $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$.

3. Szereg 1 nazywa się *zbieżnym jednostajnie na zbiorze* X, jeżeli ciąg sum częściowych $S_n(x)$ jest zbieżnym jednostajnie przy $n \to \infty$.

Przykład 9.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$$

Kryterium Cauchy'ego jednostajnej zbieżności

Twierdzenie 10 (Kryterium Cauchy'ego)**.** *Niech dany będzie określony na zbiorze X szereg funkcji $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$. Na to, żeby szereg ten był zbieżny jednostajnie potrzeba i wystarczy, żeby $\forall \varepsilon > 0$ istniał taki numer $N \in \mathbb{N}$, że $\forall n > m > N, \forall x \in X$ spełniała się nierówność $\left| \sum\limits_{i=n+1}^{m} u_i(x) \right| < \varepsilon$.*

Twierdzenie 11. *Niech dany będzie szereg funkcji $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$, zbieżny jednostajnie do $f(x)$ na zbiorze X. Wtedy jeżeli funkcje $u_i(x)$ są ciągłe na zbiorze X, to $f(x)$ też jest ciągłą na X.*

Twierdzenie Weierstrassa

Twierdzenie 12. *Niech na zbiorze X dany będzie szereg funkcji $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$, przy czym $\forall x \in X$ spełnia się nierówność $|u_i(x)| \leqslant a_i$. Wtedy jeżeli szereg $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ jest zbieżnym, to szereg $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ jest zbieżnym jednostajnie na zbiorze X.*

Dowód. Z kryterium Cauchy'ego. □

Przykład 13.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \pi k}{k^2}.$$

Szeregi potęgowe

Definicja 14. *Szeregiem potęgowym* nazywa się suma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \tag{2}$$

Twierdzenie 15. *Jeżeli szereg 2 jest zbieżny w punkcie x_0, to on jest zbieżnym bezwzględnie w dowolnym punkcie x_1, takim że $|x_1| < |x_0|$.*

Dowód. Niech będzie $x_1 > 0$. Wtedy $|x_1/x_0| \leqslant q < 1$. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ jest zbieżnym, więc $\exists S \in \mathbb{R}$, takie że $\forall k \in \mathbb{N}$ spełnia się nierówność $|a_k x_0^k| < S$. W taki sposób

$$\left|a_k x_1^k\right| = \left|a_k x_0^k\right| \cdot \left|\frac{x_1}{x_0}\right|^k \leqslant S q^k.$$

□

Promień zbieżności

Wniosek 16. *Jeżeli szereg 2 nie jest zbieżny bezwzględnie w punkcie x_0, to on jest rozbieżnym w dowolnym punkcie x_1, takim że $|x_0| \leqslant |x_1|$.*

Definicja 17. *Promieniem zbieżności* szeregu potęgowego nazywa się liczba

$$R = \sup \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ jest zbieżny} \right\}.$$

Obliczenie promienia zbieżności

Twierdzenie 18. *Niech dany będzie szereg potęgowy* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Wtedy

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

(Przy założeniu, że granica istnieje.)

Dowód. □

Uwaga 19. Z definicji wynika, iż dla $|x| < R$ szereg będzie zbieżnym, dla $x > R$ — rozbieżnym. Przy $|x| = 1$ szereg może być zarówno zbieżnym, jak i rozbieżnym.

- Ciągi i szeregi funkcji
- Ciągi funkcji
- Szeregi funkcji
- Szeregi potęgowe

Przykłady

Przykład 20. 1. $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$,

2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k}$,

3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$,

4. $\sum_{k=0}^{\infty} k!x^k$,

5. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$.

Ciągłość sumy szeregu potęgowego

Twierdzenie 21. *Niech szereg potęgowy będzie miał promień zbieżności $R > 0$. Wtedy $\forall x, |x| < R$ suma szeregu będzie ciągła w punkcie x.*

Dowód. □

Twierdzenie 22 (Abel)**.** *Niech szereg potęgowy będzie miał promień zbieżności $R > 0$. Wtedy jeżeli szereg jest zbieżnym w $x = R$ ($x = -R$), to suma szeregu będzie ciągłą w punkcie $x = R$ z lewej strony (w punkcie $x = -R$ — z prawej).*

Całkowanie i różniczkowanie szeregu potęgowego

Twierdzenie 23. *Niech szereg potęgowy 2 będzie miał promień zbieżności $R > 0$. Wtedy szereg $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1}$ też ma promień zbieżności R oraz $\forall x, |x| < R$*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot t^k \, dt.$$

Twierdzenie 24. *Niech szereg potęgowy 2 będzie miał promień zbieżności $R > 0$. Wtedy szereg $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k \cdot x^{k-1}$ też ma promień zbieżności R oraz $\forall x, |x| < R$*

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k \cdot x^k = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$$

Przykłady

Przykład 25. 1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$,

2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2x^k = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$,

3. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}x^k = -\ln(1-x)$,