Analiza Matematyczna. Szeregi liczbowe

Aleksander Denisiuk
denisiuk@pjwstk.edu.pl
Polsko-Japońska Wyższa Szkoła Technik Komputerowych
Wydział Informatyki w Gdańsku
ul. Brzegi 55
80-045 Gdańsk

22 maja 2017

Szeregi liczbowe

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem
`http://users.pjwstk.edu.pl/~denisjuk/`

Szeregi zbieżne i rozbieżne

Definicja 1. 1. *Szeregiem liczbowym* nazywa się formalna suma

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_k + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \tag{1}$$

gdzie $u_k \in \mathbb{R}$ dla $k = 1, 2, \ldots$.

2. Suma $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ nazywa się *sumą częściową* szeregu 1.
3. Szereg 1 nazywa się *zbieżnym,* jeżeli istnieje granica $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ ciągu sum częściowych przy $n \to \infty$.
4. Granica ta nazywa się *sumą* szeregu 1, oznaczenie $S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$.
5. Szereg, który nie jest zbieżnym, nazywa się *rozbieżnym.*

Przykłady szeregów

Przykład 2. 1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$.

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$.

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}$.

4. *Szereg harmoniczny:* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Własności szeregów zbieżnych

Twierdzenie 3. *Niech dane będą dwa zbieżne szeregi* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *oraz* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$. *Wtedy*

1. *Suma i różnica ciągów jest zbieżną, przy czym*
$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} v_k.$$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *szereg* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda u_k$ *jest zbieżnym oraz*
$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$
3. *Szereg, otrzymany z szeregu* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *zamianą skończonej ilości wyrazów, jest zbieżnym.*

Kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregów

Twierdzenie 4 (Kryterium Cauchy'ego)**.** *Szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *jest zbieżnym wtedy i tylko wtedy, gdy* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$ *takie, że* $\forall n_1 > n_2 > N$ *spełnia się nierówność* $\left| \sum_{k=n_2}^{n_1} u_k \right| < \varepsilon$.

Wniosek 5 (Konieczny warunek zbieżności szeregu)**.** *Niech szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *będzie zbieżnym. Wtedy* $u_k = o(1)$ *przy* $k \to \infty$.

Przykład 6. Szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-k^2}{1+20k+400k^2}$ jest rozbieżnym.

Uwaga 7. Warunek 5 nie jest *dostatecznym* warunkiem zbieżności szeregu, patrz, na przykład, szereg harmoniczny.

Szeregi o wyrazach nieujemnych

Twierdzenie 8. *Szereg o wyrazach nieujemnych jest zbieżnym wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg sum częściowych jest ograniczonym*

Twierdzenie 9 (Kryterium porównawcze zbieżności szeregu o wyrazach nieujemnych)**.** *Niech, poczynając z pewnego k, zachodzi nierówność $0 \leqslant u_k \leqslant v_k$. Wtedy*

1. *Jeżeli szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ jest zbieżnym, to $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ też jest zbieżnym.*
2. *Jeżeli szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ jest rozbieżnym, to $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ też jest rozbieżnym.*

Przykład 10. 1. Szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2+b^k}$, gdzie $b > 0$ jest zbieżnym dla $b > 1$ oraz rozbieżnym dla $0 < b \leqslant 1$.

2. Szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ jest rozbieżnym dla $0 < \alpha \leqslant 1$.

Kryterium d'Alemberta

Twierdzenie 11 (Kryterium d'Alemberta zbieżności szeregu o wyrazach nieujemnych)**.** *Niech będzie* $u_k > 0$ *oraz* $\lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = L$. *Wtedy*

1. *Jeżeli* $L < 1$, *to* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *jest zbieżnym.*
2. *Jeżeli* $L > 1$, *to* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *jest rozbieżnym.*

Przykład 12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{k})^k}{k!}$.

Uwaga 13. Jeżeli w warunkach twierdzenia 11 $\lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = 1$, co szereg $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ może być zarówno zbieżnym ($\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$, dowód będzie podany później) jak i rozbieżnym ($\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$).

Kryterium Cauchy'ego

Twierdzenie 14 (Kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregu o wyrazach nieujemnych). *Niech będzie* $u_k \geqslant 0$ *oraz* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = L$. *Wtedy*

1. *Jeżeli* $L < 1$, *to* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *jest zbieżnym.*
2. *Jeżeli* $L > 1$, *to* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *jest rozbieżnym.*

Przykład 15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$.

Całkowe kryterium Cauchy'ego-Maclaurina

Twierdzenie 16 (Całkowe kryterium Cauchy'ego-Maclaurina zbieżności szeregu o wyrazach nieujemnych)**.** *Niech dana będzie funkcja $f(x)$: nieujemna i niemalejąca na półprostej $[m, +\infty)$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$. Wtedy szereg* $\sum\limits_{k=m}^{\infty} f(k) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \dots$ *jest zbieżnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica ciągu* $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_m^n f(x)\,dx$.

Dowód. $\forall k \geqslant n$, $\forall x \in [k, k+1]$ zachodzi nierówność $f(k) \leqslant f(x) \leqslant f(k+1)$. Wynika stąd, że

$$\int\limits_k^{k+1} f(k)\,dx \leqslant \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_k^{k+1} f(k+1)\,dx.$$

$\square$

Całkowe kryterium Cauchy'ego-Maclaurina. Przykład

Przykład 17. 1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$,

2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^{\beta} k}$.

Zbieżność warunkowa i bezwzględna

Definicja 18. 1. Szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ nazywa się *zbieżnym bezwzględnie (bezwarunkowo),* jeżeli zbieżnym jest szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$.

2. Zbieżny szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ nazywa się *zbieżnym warunkowo,*zbieżność warunkowa jeżeli szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ jest rozbieżnym.

Twierdzenie 19. *Jeżeli szereg* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ *jest zbieżnym, to szereg* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *też jest zbieżnym.*

Zbieżność warunkowa i bezwzględna. Przykłady

Przykład 20. 1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$,

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Twierdzenie 21 (Riemann)**.** *Niech szereg* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *będzie zbieżnym warunkowo. Wtedy* $\forall L \in \mathbb{R}$ *można tak przestawić wyrazy szeregu, że szereg przekształcony zostanie zbieżnym do* L*.*

Twierdzenie 22 (Cauchy)**.** *Niech szereg* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *będzie zbieżnym bezwarunkowo. Wtedy dowolny szereg otrzymany poprzez przestawienie wyrazów z istotnego szeregu będzie zbieżnym bezwarunkowo do tej samej sumy.*

Szeregi przemienne

Definicja 23. Szereg $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ nazywamy *przemiennym*, jeśli jego wyrazy są naprzemian dodatnie i ujemne.

Twierdzenie 24 (Leibniz)**.** *Jeśli*

1. $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k$ *dla* $k = 1, 2, \ldots,$
2. $\lim_{k\to\infty} u_k = 0,$

to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k u_k$ *jest zbieżnym.*

Przykład 25. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$