Analiza Matematyczna

Równania różniczkowe

Aleksander Denisiuk

denisjuk@pjwstk.edu.pl

Polsko-Japońska Wyższa Szkoła Technik Komputerowych

Wydział Informatyki w Gdańsku

ul. Brzegi 55

80-045 Gdańsk

Równania różniczkowe

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

http://users.pjwstk.edu.pl/~denisjuk/

Wiadomości wstępne

Definicja 1. 1. *Równaniem różniczkowym zwyczajnym* nazywamy równanie $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, w którym występuje niewiadoma funkcja $y = y(x)$ oraz jej pochodne do rzędu n.

2. Liczba n nazywa się *rzędem* równania.

3. *Rozwiązaniem* albo *całką* równania różniczkowego nazywa się funkcja $y(x)$ zmiennej niezależnej x, która ma n pochodnych i po podstawieniu do równania spełnia to równanie tożsamościowo.

4. *Całką ogólną* równania różniczkowego rzędu n nazywa się takie jego rozwiązanie, które zależy od n niezależnych dowolnych stałych.

5. Funkcje, otrzymane z całki ogólnej dla różnych konkretnych wartości liczbowych stałych dowolnych noszą nazwę *całek szczególnych*całki szczególne równania różniczkowego równania.

Przykłady równań różniczkowych

Przykład 2. 1. $y' = x + 1$ jest równaniem pierwszego stopnia,
$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$ jest rozwiązaniem (całką szczególną) tego równania,
$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + C$ jest całką ogólną.

2. $y'' = y + 1$ jest równaniem drugiego stopnia, $y(x) = -1$ jest rozwiązaniem (całką szczególną) tego równania,
$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 1$ jest całką ogólną.

Zagadnienie Cauchy'ego

Definicja 3. *Zagadnieniem Cauchy'ego* dla równania różniczkowego n-tego rzędu jest poszukiwanie całki tego równania, spełniającej n *warunków początkowych* o postaci $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots,$ $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, gdzie $y_0, \ldots, y_{n-1}$ — dane z góry wartości funkcji $y(x)$ i jej pochodnych w ustalonym punkcie x_0.

- Zagadnienie Cauchy'ego dla bardzo szerokiej klasy równań różniczkowych ma jednoznaczne rozwiązanie.

Przykład Zagadnienia Cauchy'ego

Przykład 4.

$$\begin{cases} y'' = y + 1, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Rozwiązanie. Rozwiązanie polega na ustaleniu stałych C_1 i C_2 w całce ogólnej tego równania (v. przykład 2, punkt 2):

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 1 = 0, \\ C_1 - C_2 = 1. \end{cases}$$

Z ostatniego układu wynika, że $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Więc rozwiązaniem zagadnienia 1 będzie $y(x) = e^x - 1$. □

Równania o zmiennych rozdzielonych

Definicja 5. Równanie różniczkowe pierwszego rzędu $y' = \psi(x)\varphi(y)$, zapisywane także w postaci $M(x)N(y)\,dx + P(x)Q(y)\,dy = 0$ nazywa się *równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych.*

- Żeby rozwiązać równanie o zmiennych rozdzielonych, doprowadzamy go do postaci $f(x)dx = h(y)dy$ i całkujemy obie strony.

Uwaga 6. Przy dzieleniu równania przez wyrażenie, które zależy od x i/lub y można zgubić rozwiązania, na których to wyrażenie jest równe zeru.

Przykład równania o zmiennych rozdzielonych

Przykład 7. $x^2y^2y' + 1 = y$.

Rozwiązanie. 1. Rozdzielamy zmienne:

$$x^2y^2\frac{dy}{dx} = y - 1 \iff \frac{y^2}{y-1}\,dy = \frac{dx}{x^2}.$$

2. Całkujemy obie strony:

$$\int \frac{y^2}{y-1}\,dy = \int \frac{dx}{x^2} \iff \frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C.$$

3. Przy rozdzieleniu zmiennych dzieliliśmy przez $(y-1)x^2$, więc mogły się zgubić rozwiązania $y = 1$ oraz $x = 0$. Oczywiście, pierwsze z nich jest rozwiązaniem, drugie nie.

$\square$

Proces powielania

Przykład 8. $y' = \lambda y$.

Równania jednorodne

Definicja 9. Równanie postaci $y' = f(\frac{y}{x})$ nazywa się równaniem *jednorodnym.*

Uwaga 10. Równanie jednorodne może być zapisane również w postaci $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$, gdzie funkcje $M(x,y)$ i $N(x,y)$ są jednorodne tego samego stopnia[a].

- Żeby rozwiązać jednorodne równanie, wykonuje się podstawienie $u(x) = \frac{y}{x}$, po czym równanie zostanie równaniem o zmiennych rozdzielonych.

[a]Funkcja $F(x,y)$ nazywa się *jednorodną* stopnia α, jeżeli $\forall t \in \mathbb{R}$ spełnia się tożsamość $F(tx,ty) = t^{\alpha}F(x,y)$

Przykład równania jednorodnego

Przykład 11. $xdy = (x + y)dx$.

Rozwiązanie.

1. Równanie jest jednorodnym.
2. Zróbmy podstawienie $y = ux$, więc $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$.
3. W taki sposób, $xdy = (x + y)dx \iff xdu = dx \Rightarrow u = \ln|x| + C \Rightarrow y = x(\ln|x| + C)$.
4. Poza tym jest rozwiązanie $x = 0$, które zostało zagubiono przy dzieleniu przez x.

$\square$

Równania różniczkowe liniowe rzędu pierwszego

Definicja 12. Równanie $y' + a(x)y + b(x) = 0$ nazywa się *równaniem liniowym rzędu pierwszego.*

- Żeby rozwiązać równanie liniowe rzędu pierwszego, należy najpierw rozwiązać równanie $y' + a(x)y = 0$, w otrzymanej całce ogólnej zamienić dowolną stałą C przez niewiadomą funkcję $C(x)$, po tym, z równania istotnego, znaleźć $C(x)$.

Przykład równania liniowego rzędu pierwszego

Przykład 13. $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x.$

Rozwiązanie. 1.

$$y' - y \operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \operatorname{ctg} x \, dx \Rightarrow \ln|y| = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx =$$

$$\left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|\sin x| + \ln C \Rightarrow y = C \sin x.$$

2. $y = C(x) \sin x \Rightarrow y' = C'(x) \sin x + C(x) \cos x, \;\; y \operatorname{ctg} x = C(x) \cos x \Rightarrow C'(x) \sin x = \sin x \Rightarrow C(x) = \int dx = x + C.$

3. $y(x) = (x + C) \sin x.$

$\square$

Równanie liniowe o współczynnikach stałych

- $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$
- Rownanie jednorodne:
  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$
- Rownanie charakterystyczne:
  $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0 y = 0$
- Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego:
  $y_0(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}$, gdzie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — są *rózne* pierwiastki równania charakterystycznego
  - $e^{(u+iv)x} = e^{ux}(\cos vx + i \sin vx)$
  - w przypadku piperwiastków zespolonych zamiast $C_1 e^{(u+iv)x} + C_2 e^{(u-iv)x}$ można przyjąć $C_1 e^{ux}\cos vx + C_2 e^{ux}\sin vx$
- Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego:
  $y(x) = y_0(x) + y_1(x)$, gdzie $y_1(x)$ — rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego

Przykład: drgania

- $y" = -k^2 y$
- drgania wymuszone i rezonans: $y" = -k^2 y + \sin(\alpha x)$