

Analiza Matematyczna. Całka Riemanna

Aleksander Denisiuk

denisiuk@pjwstk.edu.pl

Polsko-Japońska Wyższa Szkoła Technik Komputerowych

Wydział Informatyki w Gdańsku

ul. Brzegi 55

80-045 Gdańsk

29 kwietnia 2017

Całka Riemanna

- Całka Riemanna
- Całka oznaczona
- Właściwości
- Oszacowanie
- Twierdzenie Newtona-Leibniza
- Całki niewłaściwe

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem
<http://users.pjwstk.edu.pl/~denisjuk/>

Definicja całki oznaczonej

- Całka Riemanna
- **Całka oznaczona**
- Właściwości
- Oszacowanie
- Twierdzenie Newtona-Leibniza
- Całki niewłaściwe

Niech $f(x)$ będzie funkcją ograniczoną na skończonym przedziale $[a, b]$.

Definicja 1. 1. Niech dane będą punkty

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Mówimy wówczas, że określony jest *podział* P_n przedziału (a, b) .

2. Przedziały $[x_{i-1}, x_i]$, gdzie $i = 1, 2, \dots, n$, nazwiemy *przedziałami cząstkowymi* podziału.

3. Długości przedziałów $[x_i, x_{i-1}]$ oznaczamy przez Δ_i ($\Delta_i = x_i - x_{i-1}$), a maksymalną z nich, $\Delta(P_n) = \max_{i=1, \dots, n} \Delta_i$ nazwiemy *średnicą podziału* P_n .

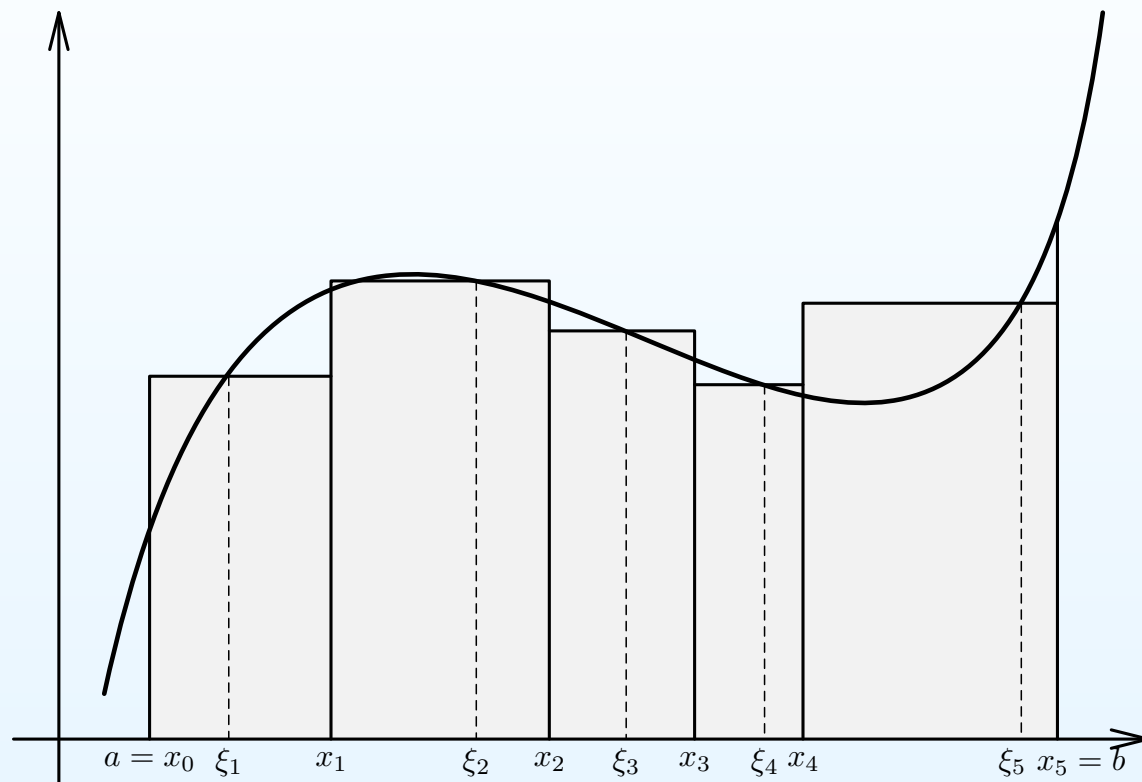
Definicja całki oznaczonej, cd

- Całka Riemanna
- **Całka oznaczona**
- Właściwości
- Oszacowanie
- Twierdzenie Newtona-Leibniza
- Całki niewłaściwe

4. Niech dane będą również węzły $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, gdzie $i = 1, \dots, n$. Sumę $S(f, P_n) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i$ nazwiemy *sumą całkową*.
5. Granicę (o ile istnieje) $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta(P_n) \rightarrow 0}} S(f, P_n)$ nazwiemy *całką oznaczoną (całką Riemanna)*, oznaczamy $\int_a^b f(x) dx$. Funkcja $f(x)$ nazywa się wówczas *całkowalną* na przedziale $[a, b]$.

Sens geometryczny całki oznaczonej

- Całka Riemanna
- **Całka oznaczona**
- Właściwości
- Oszacowanie
- Twierdzenie Newtona-Leibniza
- Całki niewłaściwe



Rysunek 1: Sens geometryczny całki Riemanna

Sens geometryczny całki oznaczonej, cd

- Całka Riemanna
- **Całka oznaczona**
- Właściwości
- Oszacowanie
- Twierdzenie Newtona-Leibniza
- Całki niewłaściwe

Niech będzie $f(x) \geq 0$ dla $x \in [a, b]$. Suma całkowa, odpowiadająca podziałowi P_n i wyborowi węzłów ξ_i równa jest polu figury, złożonej z prostokątów, zobacz rysunek 1. Granica pól takich figur, czyli całka zgadza się z polem *trapezu krzywoliniowego*, i.e., obszaru ograniczonego łukiem krzywej $y = f(x)$, odcinkiem osi Ox oraz prostymi $x = a$ i $x = b$.

Jeżeli zaś w przedziale $[a, b]$ jest $f(x) \leq 0$, to analogiczne pole równa się

$$- \int_a^b f(x) dx.$$

Klasy funkcji całkowlanych

- Całka Riemanna
- **Całka oznaczona**
- Właściwości
- Oszacowanie
- Twierdzenie Newtona-Leibniza
- Całki niewłaściwe

Twierdzenie 2. *Ciągła w przedziale $[a, b]$ funkcja jest całkowlana.*

Twierdzenie 3. *Funkcja ograniczona i ciągła w przedziale $[a, b]$ z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów jest całkowlana.*

Twierdzenie 4. *Monotoniczna w przedziale $[a, b]$ funkcja jest całkowlana.*

Suma i różnica całek

- Całka Riemanna
- Całka oznaczona
- **Właściwości**
- Oszacowanie
- Twierdzenie Newtona-Leibniza
- Całki niewłaściwe

Twierdzenie 5. Niech funkcje $f(x)$ i $g(x)$ będą całkowlane w przedziale $[a, b]$. Wtedy $f(x) \pm g(x)$ będzie funkcją całkowlaną oraz $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$.

Dowód. Rozważmy sumy całkowe:

$$\begin{aligned} S(f \pm g, P_n) &= \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) \pm g(\xi_i)) \Delta_i = \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i \pm \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta_i = S(f, P_n) \pm S(g, P_n). \end{aligned}$$

□

Liniiowość całki względem mnożenia przez liczbę

- Całka Riemanna
- Całka oznaczona
- **Właściwości**
- Oszacowanie
- Twierdzenie Newtona-Leibniza
- Całki niewłaściwe

Twierdzenie 6. *Niech funkcja $f(x)$ będzie całkowaną w przedziale $[a, b]$. Wtedy $\lambda f(x)$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowaną oraz*

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

Dowód. analogicznie do twierdzenia 5

□

Własności funkcji całkownych

- Całka Riemanna
- Całka oznaczona
- **Własności**
- Oszacowanie
- Twierdzenie Newtona-Leibniza
- Całki niewłaściwe

Twierdzenie 7. *Niech funkcje $f(x)$ i $g(x)$ będą całkowne w przedziale $[a, b]$. Wtedy $f(x) \cdot g(x)$ będzie funkcją całkowną.*

Twierdzenie 8. *Niech funkcja $f(x)$ będzie całkowna w przedziale $[a, b]$. Wtedy $|f(x)|$ też będzie funkcją całkowną.*

Twierdzenie 9. *Niech funkcja $f(x)$ będzie całkowną w przedziale $[a, b]$. Wtedy $f(x)$ będzie całkowną w dowolnym przedziale $[c, d] \subset [a, b]$.*

Własności funkcji całkownych, cd.

- Całka Riemanna
- Całka oznaczona
- **Własności**
- Oszacowanie
- Twierdzenie Newtona-Leibniza
- Całki niewłaściwe

Definicja 10. Umówmy się, że dla funkcji $f(x)$, całkownej w przedziale $[a, b]$

$$1. \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$2. \int_a^a f(x) dx = 0.$$

Twierdzenie 11. Niech funkcja $f(x)$ będzie całkowną w przedziałach $[a, c]$ oraz $[c, b]$. Wtedy $f(x)$ będzie całkowną

w przedziale $[a, b]$ oraz $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

Oszacowanie całek

- Całka Riemanna
- Całka oznaczona
- Właściwości
- **Oszacowanie**
- Twierdzenie Newtona-Leibniza
- Całki niewłaściwe

Twierdzenie 12. Niech funkcja $f(x)$ będzie całkowalną w przedziale $[a, b]$ oraz $f(x) \geq 0$ przy $x \in [a, b]$. Wtedy

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Dowód.

$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i \geq 0.$$

□

Wniosek 13. Niech funkcje $f(x)$ i $g(x)$ będą całkowalne w przedziale $[a, b]$ oraz $f(x) \geq g(x)$ przy $x \in [a, b]$. Wtedy

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Oszacowanie całek, cd.

- Całka Riemanna
- Całka oznaczona
- Właściwości
- **Oszacowanie**
- Twierdzenie Newtona-Leibniza
- Całki niewłaściwe

Wniosek 14. Niech funkcja $f(x)$ będzie całkowna w przedziale

$$[a, b]. \text{ Wtedy } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Twierdzenie 15. Niech funkcja $f(x)$ będzie całkowna w przedziale $[a, b]$, $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$, $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$. Wtedy $\exists \mu$,

$$m \leq \mu \leq M, \text{ takie że } \int_a^b f(x) dx = \mu \cdot (b - a).$$

Całka oznaczona a całka nieoznaczona

- Całka Riemanna
- Całka oznaczona
- Właściwości
- Oszacowanie
- **Twierdzenie Newtona-Leibniza**
- Całki niewłaściwe

Twierdzenie 16. Niech funkcją $f(x)$ będzie ciągłą w przedziale $[a, b]$. Wtedy $\int_a^x f(t) dt$ jest funkcją pierwotną dla $f(x)$.

Wniosek 17. Niech funkcją $f(x)$ będzie ciągłą w przedziale $[a, b]$. Wtedy istnieje funkcja pierwotna dla $f(x)$.

Wniosek 18 (Twierdzenie Newtona-Leibniza). Niech funkcją $f(x)$ będzie ciągłą w przedziale $[a, b]$, $F(x)$ będzie funkcją pierwotną.

Wtedy $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$, gdzie użyto oznaczenie

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Dowód. $F(x) = \int_a^x f(t) dt + C.$

□

Przykłady

- Całka Riemanna
- Całka oznaczona
- Właściwości
- Oszacowanie
- Twierdzenie Newtona-Leibniza
- Całki niewłaściwe

$$1. \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}, \quad n \neq -1,$$

$$2. \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 2,$$

$$3. \int_0^1 4 \frac{dx}{1+x^2} = 4 \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \pi.$$

Zamiana zmiennej w całce oznaczonej

- Całka Riemanna
- Całka oznaczona
- Właściwości
- Oszacowanie
- **Twierdzenie**
Newtona-Leibniza
- Całki niewłaściwe

Twierdzenie 19. Niech funkcja $\varphi'(x)$ będzie ciągłą w przedziale $[\alpha, \beta]$, funkcja $\varphi(x)$ będzie monotoniczną w tym przedziale, a $g(t)$ będzie ciągłą w przedziale $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$. Wtedy

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} g(x) dx.$$

Dowód. Niech $G(x)$ będzie funkcją pierwotną dla $g(x)$. Wtedy $G(\varphi(t))$ będzie funkcją pierwotną dla $g(\varphi(t))$. □

Przykłady

- Całka Riemanna
- Całka oznaczona
- Właściwości
- Oszacowanie
- **Twierdzenie**
Newtona-Leibniza
- Całki niewłaściwe

$$1. \int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx = \left| \begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{\sqrt{8}-1}{3}.$$

$$2. \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = \int_0^{\pi/2} \sin x (1 - \cos^2 x) dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| = - \int_1^0 (1 - t^2) dt = \left(\frac{1}{3} t^3 - t \right) \Big|_1^0 = \frac{2}{3}.$$

Całkowanie przez części w całce oznaczonej

- Całka Riemanna
- Całka oznaczona
- Właściwości
- Oszacowanie
- **Twierdzenie**
Newtona-Leibniza
- Całki niewłaściwe

Twierdzenie 20. Niech funkcje $u'(x)$ oraz $v'(x)$ będą ciągłe w przedziale $[a, b]$. Wtedy

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

Przykład 21. $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u(x) = x \quad v'(x) = \cos x \\ u'(x) = 1 \quad v(x) = \sin x \end{array} \right| =$

$$x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Całki niewłaściwe

- Całka Riemanna
- Całka oznaczona
- Właściwości
- Oszacowanie
- Twierdzenie Newtona-Leibniza
- **Całki niewłaściwe**

Definicja 22 (Całki funkcji nieograniczonych). Niech funkcja $f(x)$ będzie całkowna w każdym przedziale $[a, b - \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$). Wtedy

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

Definicja 23 (Całki w przedziale nieskończonym). Niech funkcja $f(x)$ będzie całkowna w każdym przedziale $[a, N]$ ($N > a$). Wtedy

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^N f(x) dx$$

Przykłady całek niewłaściwych

- Całka Riemanna
- Całka oznaczona
- Właściwości
- Oszacowanie
- Twierdzenie Newtona-Leibniza
- **Całki niewłaściwe**

Przykład 24. 1.
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda} = \begin{cases} \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \Big|_0^1, & \lambda \neq -1 \\ \ln x \Big|_0^1, & \lambda = -1 \end{cases} =$$

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \Big|_\varepsilon^1, & \lambda \neq -1 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln x \Big|_\varepsilon^1, & \lambda = -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\lambda}, & \lambda < 1 \\ \infty, & \lambda \geq 1 \end{cases}$$

2.
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^N = \frac{\pi}{2}$$

3.
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \begin{cases} \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \Big|_1^\infty, & \lambda \neq -1 \\ \ln x \Big|_1^\infty, & \lambda = -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda-1}, & \lambda > 1 \\ \infty, & \lambda \leq 1 \end{cases}$$