Analiza Matematyczna. Pochodne wyższych rzędów. Wzór Taylora

Aleksander Denisiuk
denisiuk@pjwstk.edu.pl
Polsko-Japońska Wyższa Szkoła Technik Komputerowych
Wydział Informatyki w Gdańsku
ul. Brzegi 55
80-045 Gdańsk

23 kwietnia 2017

Pochodne wyższych rzędów. Wzór Taylora

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem
http://users.pjwstk.edu.pl/~denisjuk/

Definicje pochodnych wyższych rzędów

Definicja 1.
1. Niech funkcja $f(x)$ będzie różniczkowalna w otoczeniu punktu a. Jeżeli $f'(x)$ jest różniczkowalną w punkcie a, to pochodna $\left(f'\right)'(a)$ nazywa się *drugą pochodną* funkcji f w punkcie a. Oznaczenie $f''(a)$ lub $f^{(2)}(a)$. Funkcję f nazywamy *dwa razy różniczkowalną* w punkcie a.
2. Niech $n \geqslant 2$ i funkcja $f(x)$ będzie n razy różniczkowalna w otoczeniu punktu a, oraz pochodna $f^{(n)}$ będzie różniczkowalna w punkcie a. Wówczas funkcja f jest $(n+1)$ *razy różniczkowalna*funkcja różniczkowalna n razy w punkcie a oraz $f^{(n+1)}(a) = \left(f^{(n)}\right)'(a)$.
3. Alternatywne oznaczenia: $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}, \quad y''(t) = \ddot{y}(t)$.

Pochodne wyższych rzędów sumy, ilorazu i iloczynu

Twierdzenie 2. *Niech funkcje $f(x)$ oraz $g(x)$ będą n razy różniczkowalne w punkcie a. Wówczas $f \pm g$ też będzie n razy różniczkowalną funkcją oraz $\left(f \pm g\right)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}$.*

Dowód. Indukcja $\square$

Twierdzenie 3 (Leibniz)**.** *Niech funkcje $f(x)$ oraz $g(x)$ będą n razy różniczkowalne w punkcie a. Wówczas $f \cdot g$ też będzie n razy różniczkowalną funkcją oraz $\left(f \cdot g\right)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$.*

Dowód. Indukcja $\square$

Pochodne wyższych rzędów funkcji elementarnych

Twierdzenie 4. *1.* $\left(x^{\alpha}\right)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$,

2. $\left(x^{n}\right)^{(n)}=n!$,

3. $\left(x^{n}\right)^{(n+1)}=0$,

4. $\left(a^{x}\right)^{(n)}=a^{x}\cdot\ln^{n}a$,

5. $\left(\ln(1+x)\right)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^{n}}$,

6. $\left(\sin x\right)^{(n)}=\sin(x+\frac{\pi}{2}n)$,

7. $\left(\cos x\right)^{(n)}=\cos(x+\frac{\pi}{2}n)$,

8. $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{(n)}=(-1)^{n-1}n!(ad-bc)(cx+d)^{-(n+1)}\cdot c^{n-1}$.

Dowód. Indukcja □

Wzór Taylora

Twierdzenie 5 (Taylor-Lagrange). *Niech funkcja $f(x)$ będzie $(n+1)$ razy różniczkowalną w otoczeniu punktu a. Wówczas $\forall x$ z tego otoczenia $\exists \xi$ pomiędzy a a x, takie że*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x), \quad (1)$$

gdzie $R_{n+1}(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Dowód twierdzenia Taylora-Lagrange'a

Dowód.

- Ustalmy punkt x.
- Rozważmy funkcję $\psi(t) = -f(x) + \varphi(x,t) + \frac{(x-t)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}} R_{n+1}(x)$, gdzie
  - $\varphi(x,t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$,
  - $R_{n+1}(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$
- Funkcja $\psi(t)$ spełnia warunki twierdzenia Rolle'a.
- Więc istnieje punkt ξ pomiędzy a a x, taki że $\psi'(\xi) = 0$.

–verte–

Twierdzenie Taylora-Lagrange'a, cd

Dowód. cd.

- $\psi'(\xi) = f'(\xi) + \frac{f''(\xi)}{1!}(x-\xi) - \frac{f'(\xi)}{1!} + \frac{f^3(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 - \frac{f''(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n - \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1} - (n+1)\frac{(x-\xi)^n}{(x-a)^{n+1}}R_{n+1}(x)$.
- Wynika stąd, że $\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1} = (n+1)\frac{(x-\xi)^n}{(x-a)^{n+1}}R_{n+1}(x)$.

$\square$

Twierdzenie Taylora-Peano

Twierdzenie 6 (Taylor-Peano). *Niech funkcja $f(x)$ będzie $(n-1)$ razy różniczkowalną w otoczeniu punktu a i ma pochodną rzędu n w punkcie a. Wówczas*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \tag{2}$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big). \tag{3}$$

Uwaga 7. Wzór 1 dla $a = 0$ nazywa się *wzorem Maclaurina.*

Wzór Maclaurina funkcji elementarnych

Twierdzenie 8. *1.* $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$,

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1})$,

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k})$,

4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$,

5. $(1+x)^\alpha =$

$$1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^2 + o(x^n).$$

Wniosek 9 (dwumian Newtona)**.** $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$.

Zastosowania drugiej pochodnej

Twierdzenie 10 (Dostateczy warunek ekstremum)**.** *Niech funkcja $f(x)$ będzie różniczkowalną w otoczeniu punktu a i ma drugą pochodną w punkcie a. Wówczas, jeżeli $f'(a) = 0$ oraz $f'(a) > 0$ ($f'(a) < 0$), to funkcja $f(x)$ ma w punkcie A lokalne minimum (maksimum).*

Dowód.

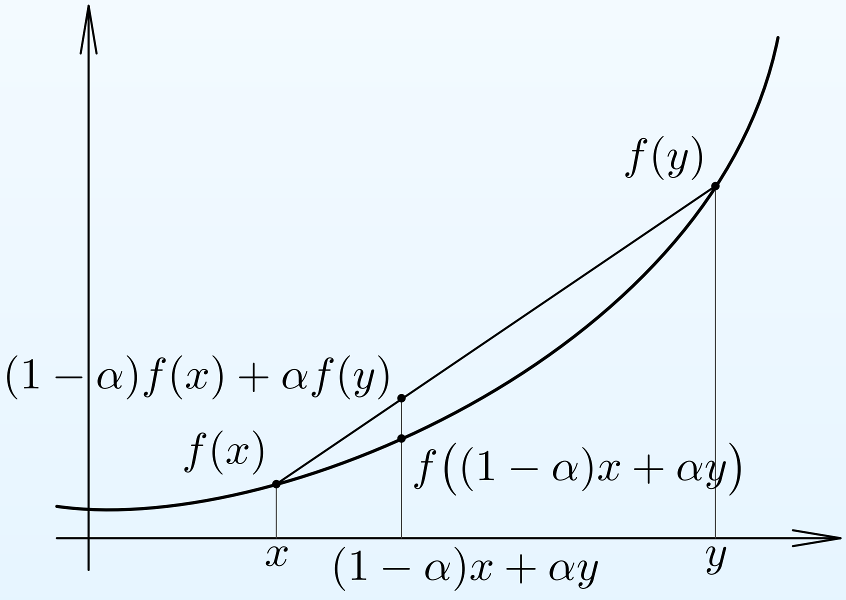
$$f(a+\alpha) = f(a) + f'(a)\alpha + f''(a)\alpha^2 + o(\alpha^2) = \\ = f(a) + (f''(a) + o(1))\alpha^2$$

□

Funkcje wypukłe

Definicja 11. Funkcja $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ nazywa się *wypukłą* na odcinku $[a, b]$, jeżeli $\forall x, y \in [a, b], \forall \alpha \in [0, 1]$

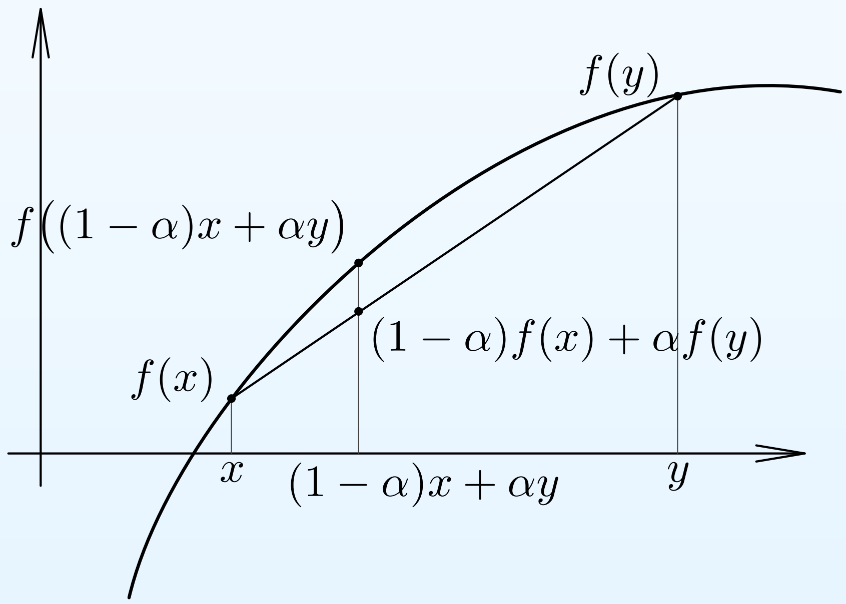
$$f\big((1-\alpha)x + \alpha y\big) \leqslant (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)$$



Funkcje wklęsłe

Definicja 12. Funkcja $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ nazywa się *wklęsłą* na odcinku $[a, b]$, jeżeli $\forall x, y \in [a, b], \forall \alpha \in [0, 1]$

$$f\big((1-\alpha)x + \alpha y\big) \geqslant (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)$$



Dostateczny warunek wypukłości

Twierdzenie 13. *Niech funkcja $f(x)$ będzie ciągła na odcinku $[a, b]$, dwa razy różniczkowalną na (a, b) i w każdym punkcie $x \in (a, b)$ spełniona jest nierówność $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$). Wówczas funkcja $f(x)$ jest wypukła (wklęsła) na $[a, b]$.*

Dowód. Niech $t = (1-\alpha)x + \alpha y$. Wtedy
$y - t = (1-\alpha)(y-x)$, $x - t = -\alpha(y-x)$.

$$f(y) = f(t) + f'(t)(1-\alpha)(y-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)\big((1-\alpha)(y-x)\big)^2$$

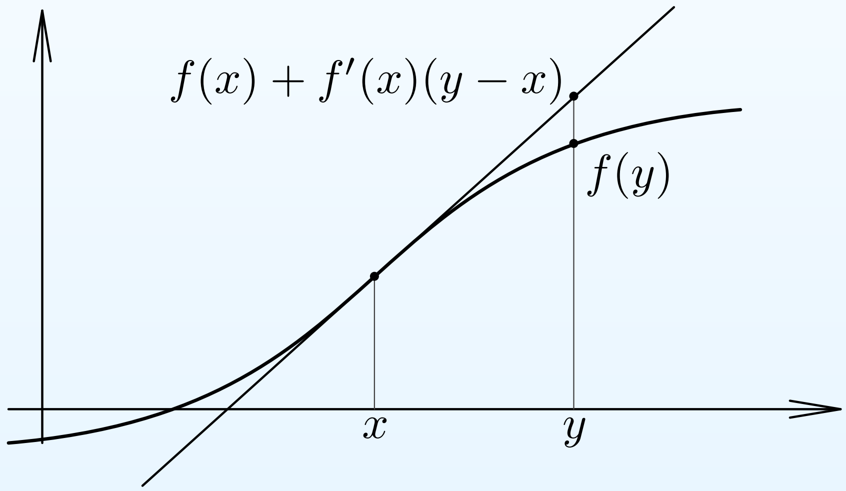
$$f(x) = f(t) - f'(t)\alpha(y-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)\big(\alpha(y-x)\big)^2$$

$$(1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) = f(t) +$$
$$+\frac{1}{2}\Big((1-\alpha)f''(\xi_2)\big(\alpha(y-x)\big)^2 + \alpha f''(\xi_1)\big((1-\alpha)(y-x)\big)^2\Big)$$

□

Punkty przegięcia

Definicja 14. Niech funkcja $f(x)$ będzie ciągła na odcinku $[a, b]$ oraz różniczkowalną na (a, b). Punkt $x \in (a, b)$ nazywa się *punktem przegięcia*, jeżeli styczna w tym punkcie przechodzi z jednej strony wykresu na drugą.



- $f(y) < f(x) + f'(x)(y - x)$ dla $y > x$
- $f(y) > f(x) + f'(x)(y - x)$ dla $y < x$
- lub odwrotnie

Warunek konieczny punktu przegięcia

Twierdzenie 15. *Niech funkcja f będzie ciągła i różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0 oraz ma drugą pochodną w x_0. Wówczas, jeżeli x_0 jest punktem przegięcia, to $f''(x_0) = 0$.*

Dowód.

- $F(x) = f(x) - \big(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\big)$ zmienia znak w x_0.
- Więc nie może mieć ekstremum lokalnego w x_0.
- $F'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$.
- $F''(x_0) = f''(x_0)$. Gdyby $f''(x_0)$ nie było by równe 0, $F(x)$ by miała ekstremum lokalne w x_0.

$\square$

Dostateczny warunek punktu przegięcia

Twierdzenie 16. *Niech funkcja f będzie dwa razy różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0 oraz to f'' zmienia znak w x_0. Wówczas x_0 jest punktem przegięcia.*

Dowód.

- Pochodna funkcji $F(x) = f(x) - \big(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\big)$ ma ekstremum lokalne w x_0.
- $F'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$.
- Więc w sąsiedztwie x_0 pochodna jest tego samego znaku.
- W taki sposób, w punkcie x_0 funkcja $F(x)$ rośnie (lub maleje).

□

Dostateczny warunek punktu przegięcia — II

Twierdzenie 17. *Niech funkcja f będzie trzy razy różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0 oraz to $f''(x_0) = 0$ i $f^{(3)}(x_0) \neq 0$. Wówczas x_0 jest punktem przegięcia.*

Dowód.

- $f''(x_0) = 0$ oraz jest monotoniczna w otoczeniu x_0.
- Więc w x_0 zmienia znak.

□

Badanie przebiegu zmienności funkcji

1. Dziedzina funkcji
2. Okres, parzystość, nieparzystość
3. Punkty przecięcia osi
4. Asymptoty:
   - (a) pionowe
   - (b) poziome
   - (c) ukośne
5. Ekstrema lokalne
6. Punkty przegięcia
7. ???????
8. PROFIT

Badanie przebiegu zmienności funkcji. Przykłady

1. $f(x) = x + \frac{1}{x}$
2. $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$