Analiza Matematyczna. Własności funkcji różniczkowalnych

Aleksander Denisiuk
denisiuk@pjwstk.edu.pl
Polsko-Japońska Wyższa Szkoła Technik Komputerowych
Wydział Informatyki w Gdańsku
ul. Brzegi 55
80-045 Gdańsk

5 kwietnia 2017

Własności funkcji różniczkowalnych

- Własności funkcji różniczkowalnych
- Ekstrema
- Twierdzenie Rolle'a
- Twierdzenie Lagrange'a
- Minumum/Maksimum
- Dwie nierówności
- Twierdzenie Cauchy'ego

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem
`http://users.pjwstk.edu.pl/~denisjuk/`

Wzrastanie funkcji w punkcie. Ekstremum lokalne

- Własności funkcji różniczkowalnych
- Ekstrema
- Twierdzenie Rolle'a
- Twierdzenie Lagrange'a
- Minumum/Maksimum
- Dwie nierówności
- Twierdzenie Cauchy'ego

Niech dana będzie funkcja $y = f(x)$, określona w otoczeniu punktu c.

Definicja 1.
1. Funkcja $y = f(x)$ *rośnie* w punkcie c, jeżeli istnieje takie otoczenie punktu c, że $f(x) < f(c)$ dla $x < c$ oraz $f(x) > f(c)$ dla $x > c$,
2. Funkcja $y = f(x)$ *maleje* w punkcie c, jeżeli istnieje takie otoczenie punktu c, że $f(x) > f(c)$ dla $x < c$ oraz $f(x) < f(c)$ dla $x > c$,
3. Funkcja $y = f(x)$ ma *maksimum lokalne* w punkcie c, jeżeli istnieje takie otoczenie punktu c, w którym $f(x) \leqslant f(c)$
4. Funkcja $y = f(x)$ ma *minimum lokalne* w punkcie c, jeżeli istnieje takie otoczenie punktu c, w którym $f(x) \geqslant f(c)$
5. Funkcja $y = f(x)$ ma *ekstremum lokalne* w punkcie c, jeżeli ona ma w tym punkcie minimum lub maksimum lokalne.

Konieczny warunek ekstremum

- Własności funkcji różniczkowalnych
- Ekstrema
- Twierdzenie Rolle'a
- Twierdzenie Lagrange'a
- Minumum/Maksimum
- Dwie nierówności
- Twierdzenie Cauchy'ego

Twierdzenie 2. *Niech dana będzie funkcja $f(x)$ różniczkowalna w punkcie a. Wtedy, jeżeli $f'(a) > 0$ ($f'(a) < 0$), to $f(x)$ rośnie (maleje) w punkcie a.*

Wniosek 3. *Jeżeli funkcja $f(x)$ ma wpunkcie a ekstremum lokalne, to $f'(a) = 0$.*

Uwaga 4. Przykład funkcji $y = x^3$ wskazuje, że twierdzenie 2 daje *dostateczny* warunek wzrastania (malenia), który nie jest koniecznym. Natomiast warunek ekstremum lokalnego z wniosku 3 jest *koniecznym,* i nie jest dostatecznym.

Twierdzenie Rolle'a

- Własności funkcji różniczkowalnych
- Ekstrema
- Twierdzenie Rolle'a
- Twierdzenie Lagrange'a
- Minumum/Maksimum
- Dwie nierówności
- Twierdzenie Cauchy'ego

Twierdzenie 5. *Niech funkcja $y = f(x)$ będzie ciągłą na przedziale $[a, b]$, różniczkowalną na przedziale (a, b), oraz $f(a) = f(b)$. Wtedy $\exists \xi \in (a, b)$, takie że $f'(\xi) = 0$.*

Dowód. f osiąga swoje kresy $M = \sup f$ i $m = \inf f$. Jeżeli $M = m$, to $f(x) = \mathrm{const}$ i $f'(x) \equiv 0$. Jeżeli $M > m$, to przynajmniej jeden z kresów jest osiągalny wewnątrz przedziału (a, b). Więc w tym punkcie f ma ekstremum lokalne. $\square$

Twierdzenie Lagrange'a

- Własności funkcji różniczkowalnych
- Ekstrema
- Twierdzenie Rolle'a
- Twierdzenie Lagrange'a
- Minumum/Maksimum
- Dwie nierówności
- Twierdzenie Cauchy'ego

Twierdzenie 6. *Niech funkcja $y = f(x)$ będzie ciągłą na przedziale $[a, b]$ oraz różniczkowalną na przedziale (a, b). Wtedy $\exists \xi \in (a, b)$, takie że $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.*

Dowód. Zastosować twierdzenie Rolle'a (twierdzenie 5) do funkcji $f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. □

- Własności funkcji różniczkowalnych
- Ekstrema
- Twierdzenie Rolle'a
- Twierdzenie Lagrange'a
- Minumum/Maksimum
- Dwie nierówności
- Twierdzenie Cauchy'ego

Wnioski z twierdzenia Lagrange'a

Twierdzenie 7. *Niech funkcja* $y = f(x)$ *będzie różniczkowalna na przedziale* (a, b) *oraz* $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) = 0$. *Wtedy* $f(x) = \text{const.}$

Dowód. $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ istnieje $\xi \in (a, b)$ takie, że $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0$. □

Wnioski z twierdzenia Lagrange'a

- Własności funkcji różniczkowalnych
- Ekstrema
- Twierdzenie Rolle'a
- Twierdzenie Lagrange'a
- Minumum/Maksimum
- Dwie nierówności
- Twierdzenie Cauchy'ego

Twierdzenie 8. *Niech funkcja $y = f(x)$ będzie różniczkowalna na przedziale (a, b). Na to, żeby funkcja f była niemalejącą (nierosnącą) na tym przedziale, potrzeba i wystarczy, żeby na (a, b) było $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$).*

Dowód.

$\Rightarrow$ Niech $f(x)$ będzie niemalejącą na (a, b). Wtedy w żadnym z punktów (a, b) funkcją nie może być malejącą. Za mocą twierdzenia 2 w żadnym z punktów (a, b) nie może być $f'(x) < 0$.

$\Leftarrow$ Niech $\forall x \in (a, b)$ będzie $f'(x) \geqslant 0$. Rozważmy dowolne $x_1, x_2 \in (a, b)$, takie że $x_1 < x_2$. Istnieje $\xi \in (a, b)$, takie że $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geqslant 0$.

$\square$

Dostateczny warunek monotoniczności funkcji

- Własności funkcji różniczkowalnych
- Ekstrema
- Twierdzenie Rolle'a
- Twierdzenie Lagrange'a
- Minumum/Maksimum
- Dwie nierówności
- Twierdzenie Cauchy'ego

Twierdzenie 9. *Niech funkcja* $y = f(x)$ *będzie różniczkowalna na przedziale* (a, b) *oraz* $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) > 0$ *(*$f'(x) < 0$*). Wtedy* $f(x)$ *rośnie (maleje) na przedziale* (a, b)*.*

Uwaga 10. Warunek $f'(x) > 0$ nie jest *koniecznym* na to, żeby funkcja f była rosnącą na przedziale, np. $y = x^3$.

Wniosek 11 (Dostateczny warunek ekstremum)**.** *Niech funkcja* $y = f(x)$ *będzie różniczkowalna w otoczeniu punktu* a *oraz pochodna* f' *w pukcie* a *zmienia znak z minusa na plus (z plusa na minus). Wtedy* $f(x)$ *ma w punkcie* a *minimum (maksimum) lokalne.*

- Własności funkcji różniczkowalnych
- Ekstrema
- Twierdzenie Rolle'a
- Twierdzenie Lagrange'a
- Minumum/Maksimum
- Dwie nierówności
- Twierdzenie Cauchy'ego

Poszukiwanie maksimum i minimum funkcji

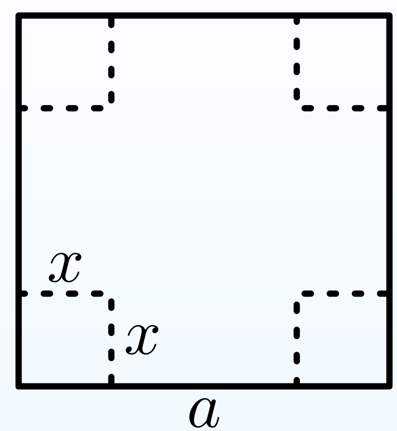
Twierdzenie 12. *Niech funkcja $y = f(x)$ będzie ciągła na przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna w przedziale (a, b) za wyjątkiem skończonej ilości punktów. Wtedy funkcja f osiąga maksimum (minimum) w pukncie x_0, który spełnia jaden z warunków:*

- *x_0 jest końcem przedziału,*
- *$f'(x_0) = 0$,*
- *$f'(x_0)$ nie istnieje.*

Przykład 13. Z kwadratowego kartonu stwórz pudełko o największej objętości.

- Własności funkcji różniczkowalnych
- Ekstrema
- Twierdzenie Rolle'a
- Twierdzenie Lagrange'a
- Minumum/Maksimum
- Dwie nierówności
- Twierdzenie Cauchy'ego

Rozwiązanie zadania o pudełku



- $f(x) = x(a-2x)^2, \quad x \in [0, \frac{a}{2}],$
- $f'(x) = 0 \iff (a-2x)(a-6x) = 0 \iff x = \frac{a}{2} \vee x = \frac{a}{6},$
-

x	0	$\frac{a}{6}$	$\frac{a}{2}$
$f(x)$	0	$\frac{2a^3}{27}$	0

- Odp: należy nadciąć karton na odległości $\frac{1}{6}$ od rogu.

Dwie nierówności

- Własności funkcji różniczkowalnych
- Ekstrema
- Twierdzenie Rolle'a
- Twierdzenie Lagrange'a
- Minumum/Maksimum
- Dwie nierówności
- Twierdzenie Cauchy'ego

Twierdzenie 14. *1.* $|\sin x_1 - \sin x_2| \leqslant |x_1 - x_2|$.
2. $|\operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2| \leqslant |x_1 - x_2|$.

Dowód.

1. $\sin x_1 - \sin x_2 = \cos\xi(x_1 - x_2)$,
2. $\operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2 = \frac{1}{1+\xi^2}(x_1 - x_2)$.

□

- Własności funkcji różniczkowalnych
- Ekstrema
- Twierdzenie Rolle'a
- Twierdzenie Lagrange'a
- Minumum/Maksimum
- Dwie nierówności
- Twierdzenie Cauchy'ego

Twierdzenie Cauchy'ego

Twierdzenie 15. *Niech funkcje $f(x)$ i $g(x)$ będą różniczkowalne na przedziale (a,b), ciągłe na przedziale $[a,b]$ oraz $g'(x) \neq 0$ na (a,b). Wtedy istnieje $\xi \in (a,b)$, takie że*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Dowód. Zastosować twierdzenie Rolle'a (twierdzenie 5) do funkcji $f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big)$. □

Reguła de L'Hospitala (wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$)

- Własności funkcji różniczkowalnych
- Ekstrema
- Twierdzenie Rolle'a
- Twierdzenie Lagrange'a
- Minumum/Maksimum
- Dwie nierówności
- Twierdzenie Cauchy'ego

Twierdzenie 16. *Niech dane będą dwie funkcje $f(x)$ i $g(x)$, określone i różniczkowalne w sąsiedztwie punktu a, oraz $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ i $g'(x) \neq 0$ w tym samym sąsiedztwie. Wtedy, jeżeli istnieje (być może, nieskończona) granica $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to istnieje $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Dowód. Określmy funkcje $f(x)$ oraz $g(x)$ zerem w punkcie a. Wtedy funkcje te zostaną ciągłe w ototczeniu a i można zastosować twierdzenie Cauchy'ego (twierdzenie 15).
Niech $\{ x_n \}$ będzie ciągiem, zbieżnym do a o wyrazach różnych od a. Wtedy $\forall n\ \exists \xi_n$ między a i x_n, takie że $\frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$.
Ciąg $\{ \xi_n \}$ też będzie zbieżnym do a i o wyrazach różnych od a.
W ten sposób

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Reguła de L'Hospitala (wyrażenie nieoznaczone $\frac{\infty}{\infty}$)

- Własności funkcji różniczkowalnych
- Ekstrema
- Twierdzenie Rolle'a
- Twierdzenie Lagrange'a
- Minumum/Maksimum
- Dwie nierówności
- Twierdzenie Cauchy'ego

Twierdzenie 17. *Niech dane będą dwie funkcje $f(x)$ i $g(x)$, określone i różniczkowalne w sąsiedztwie punktu a, oraz oraz $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ w tym samym sąsiedztwie. Wtedy, jeżeli istnieje (być może, nieskończona) granica $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to istnieje $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Uwaga 18. Raguły de L'Hospitala są ważne równiez dla granic jednostronnych oraz granic w nieskończoności

Przykłady

- Własności funkcji różniczkowalnych
- Ekstrema
- Twierdzenie Rolle'a
- Twierdzenie Lagrange'a
- Minumum/Maksimum
- Dwie nierówności
- Twierdzenie Cauchy'ego

Przykład 19. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x}\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-1/2}}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1/x}{(-1/2)\cdot x^{-3/2}}=$
$-2\cdot\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x}=0$.