Analiza Matematyczna. Pochodna funkcji jednej zmiennej

Aleksander Denisiuk
denisiuk@pjwstk.edu.pl
Polsko-Japońska Wyższa Szkoła Technik Komputerowych
Wydział Informatyki w Gdańsku
ul. Brzegi 55
80-045 Gdańsk

5 kwietnia 2017

Pochodna funkcji jednej zmiennej

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem
`http://users.pjwstk.edu.pl/~denisjuk/`

Pojęcie pochodnej

Niech dana będzie funkcja $y = f(x)$, określona w otoczeniu (a, b) punktu x.

Definicja 1. 1. Liczba Δx, taka że $x + \Delta x \in (a, b)$ nazywa się *przyrostem* zmiennej niezależnej x.
2. Liczba $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ nazywa się *przyrostem* funkcji f w punkcie x.

Lemat 2. *Funkcja $y = f(x)$ jest ciągła w punkcie x wtedy i tylko wtedy, gdy przyrost funkcji w tym punkcie, $\Delta y = o(1)$ przy $\Delta x \to 0$.*

Definicja 3. 1. Iloraz $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nazywa się *ilorazem różniczkowym*
2. Granica (o ile istnieje) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x}$ nazywa się *pochodną* funkcji f w punkcie x.
3. Alternatywne oznaczenia: $f'(x) = \frac{df}{dx}$, $y'(t) = \dot{y}(t)$.

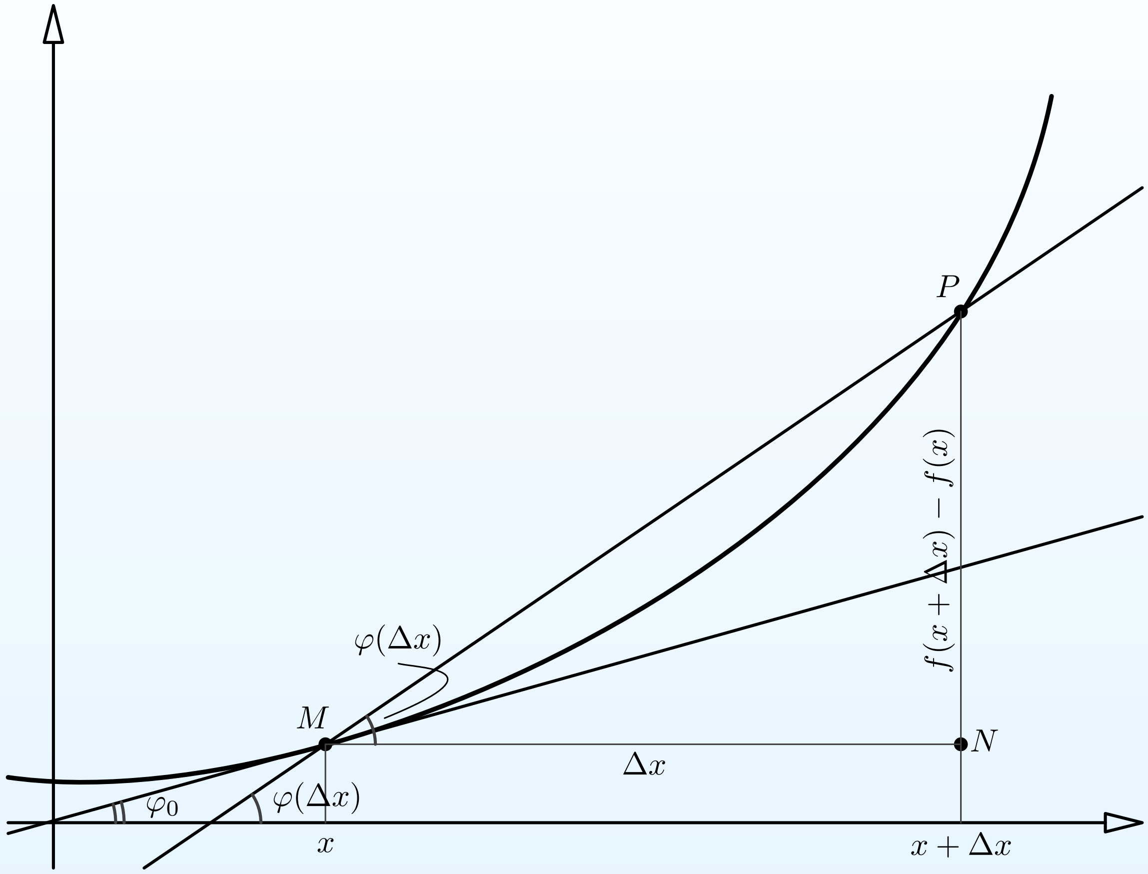
Przykłady

Przykład 4. 1. $f(x) = \mathrm{const} \Longrightarrow f'(x) = 0.$

2. $f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1.$

3. Funkcja $f(x) = |x|$ nie ma pochodnej w punkcie 0.

Sens geometryczny pochodnej funkcji w punkcie



Komentarze do rysunku

Definicja 5. Prosta, przechodząca przez punkty M i P nazywa się *sieczną*

- *Kąt pochylenia* stycznej MP jest funkcją od Δx, oznaczmy jego przez $\varphi(\Delta x)$.
- Z trójkąta MPN widać, że $\operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.
- W taki sposób, przy $\Delta x \to 0$ $(P \to M)$ istnieje położenie graniczne stycznej wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $f'(x)$.

Definicja 6. Prosta $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ jest *styczną* do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie x_0.

Uwaga 7. $f'(x)$ zgadza się z tangensem kąta pochylenia stycznej.

Uwaga 8. Funkcja $y = f(x)$, która ma pochodną nazywa się również *gładką*.

Funkcje różniczkowalne

Definicja 9. Funkcja $y = f(x)$ nazywa się *różniczkowalną* w punkcie x, jeżeli $\exists A \in \mathbb{R}$, takie że $\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ przy $\Delta x \to 0$.

Twierdzenie 10. *Funkcja $y = f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $f'(x_0)$.*

Dowód.

$$\Rightarrow: \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \big(A + o(1)\big) = A.$$

$$\Leftarrow: \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - f'(x_0) \cdot \Delta x}{\Delta x} = 0 \Longrightarrow \Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

$\square$

Wniosek 11. *Liczba A w definicji 9 równa jest $f'(x_0)$.*

Twierdzenie 12. *Funkcja różniczkowalna w punkcie jest ciągłą w tym punkcie.*

Różniczkowalnie funkcji złożónej

Twierdzenie 13. *Niech funkcja $x = \varphi(t)$ będzie różniczkowalną w punkcie t_0, zaś funkcja $y = f(x)$ będzie różniczkowalną w punkcie $x_0 = \varphi(t_0)$. Wtedy funkcja złożona $f(\varphi(t))$ będzie różniczkowalną w punkcie t_0, przy czym*

$$\left[f\left(\varphi(t_0)\right)\right]' = f'\left(\varphi(t_0)\right) \cdot \varphi'(t_0)$$

Dowód.

- $\Delta x = \phi'(t_0)\Delta t + o(\Delta t)$.
- $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) = f'\left(\varphi(t_0)\right)\left[\varphi'(t_0)\Delta t + o(\Delta t)\right] + o(\Delta t) = f'\left(\varphi(t_0)\right)\varphi'(t_0)\Delta t + o(\Delta t)$.

$\square$

Różniczkowalnie funkcji odwrotnej

Twierdzenie 14. *Niech $f(x)$ będzie funkcją rosnącą (malejącą) i ciągłą w otoczeniu punktu x_0, oraz różniczkowalną w punkcie x_0 i $f'(x) \neq 0$. Wtedy w otoczeniu punktu $y_0 = f(x_0)$ określona jest funkcja odwrotna $x = f^{-1}(y)$, która jest rosnącą (malejącą) i ciągłą w otoczeniu y_0 oraz różniczkowalna w punkcie y_0 i*

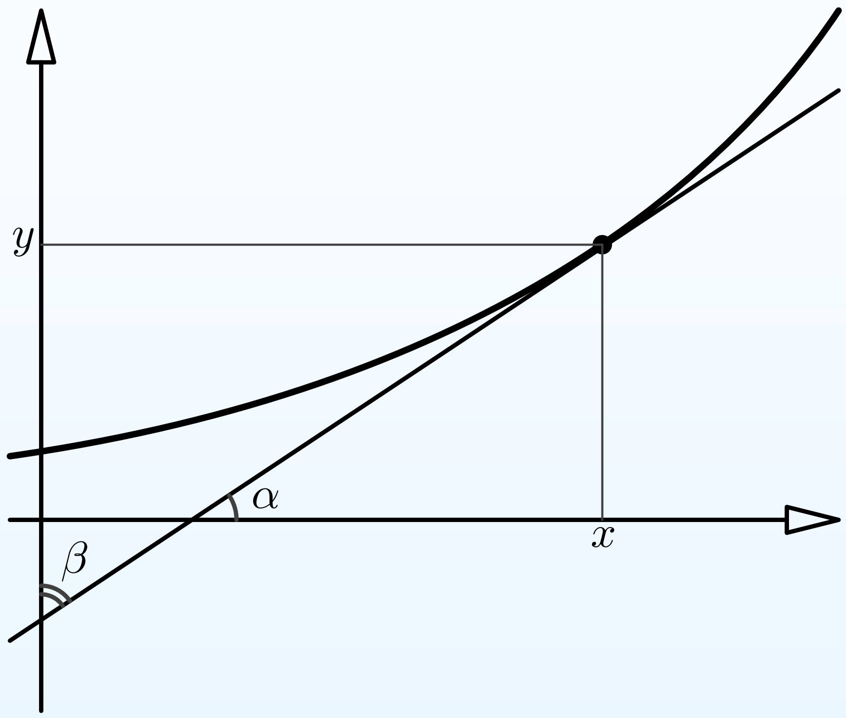
$$\left[f^{-1}(y_0)\right]' = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dowód.

- $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$.
- Za mocą ciągłości $\Delta y \to 0 \iff \Delta x \to 0$.
- Więc $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$.

$\square$

Sens geometryczny pochodnej funkcji odwrotnej



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}, \text{ gdy } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

Różniczkowanie sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji

Twierdzenie 15. *Niech funkcje $u(x)$ oraz $v(x)$ będą różniczkowalne w punkcie x. Wtedy suma, różnica, iloczyn i iloraz (iloraz w przypadku $v(x) \neq 0$) są różniczkowalne w punkcie x, przy czym*

1. $\left[u(x) \pm v(x)\right]' = u'(x) \pm v'(x)$,
2. $\left[u(x) \cdot v(x)\right]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$,
3. $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$.

Pochodne funkcji elementarnych

Twierdzenie 16. *1.* $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e,$

2. $(\ln_a x)' = \frac{1}{x},$

3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a,$

4. $(e^x)' = e^x,$

5. $(x^a)' = a \cdot x^{a-1},$

6. $(\sin x)' = \cos x,$

7. $(\cos x)' = -\sin x,$

8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$

9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$

10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$

11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$

12. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$

13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$

14. $(\sinh x)' = \cosh x,$

15. $(\cosh x)' = \sinh x,$

16. $(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x},$

17. $(\operatorname{ctgh} x)' = \frac{1}{\sinh^2 x}.$

Dwód twierdzenia 16

Dowód.

1 $\frac{\Delta \log_a x}{\Delta x} = \frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a(x)}{\Delta x} = \frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x}) = \frac{1}{x}\log_a\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \frac{1}{x}\log_a e.$

3 $(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e} = \frac{y}{\log_a e} = a^x \cdot \ln a.$

5 $(x^a)' = (e^{a\ln x})' = e^{a\ln x} \cdot (a\ln x)' = x^a \cdot a\frac{1}{x} = ax^{a-1}.$

6 $\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \cos x.$

7 $(\cos x)' = \left(\sin(\frac{\pi}{2}-x)\right)' = \cos(\frac{\pi}{2}-x)\cdot(\frac{\pi}{2}-x)' = -\sin x.$

8 $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$

–verte–

Dwód twierdzenia 16, cd

Dowód. cd.

10 $(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos \arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

12 $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}.$

14 $(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$

$\square$