

Analiza Matematyczna. Przegląd własności funkcji elementarnych

Aleksander Denisiuk

denisiuk@pjwstk.edu.pl

Polsko-Japońska Wyższa Szkoła Technik Komputerowych

Wydział Informatyki w Gdańsku

ul. Brzegi 55

80-045 Gdańsk

24 marca 2017

Przegląd własności funkcji elementarnych

- Przegląd własności funkcji elementarnych

- Potęga
- Wykładnicza
- Logarytm
- Potęgowa
- Trygonometryczne
- Kołowe
- Hiperboliczne

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem
<http://users.pjwstk.edu.pl/~denisjuk/>

Potęga wymierna

● Przegląd własności funkcji elementarnych

● Potęga

● Wykładnicza

● Logarytm

● Potęgowa

● Trygonometryczne

● Kołowe

● Hiperboliczne

Twierdzenie 1. Niech $n \in \mathbb{N}$. Wtedy funkcja x^n przy $x \in [0, +\infty)$ rośnie i jest ciągłą.

Dowód. $x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \cdots + x_1^{n-1})$. \square

Wniosek 2. Istnieje funkcja, odwrotna do

$x^n : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, pierwiastek stopnia n : $y \mapsto \sqrt[n]{y}$.

Definicja 3. Niech α będzie liczbą wymierną. Wtedy dla $a > 0$ określone jest a^α w sposób następujący:

1. Dla $n > 0$: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$,
2. dla $m, n > 0$: $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$,
3. $a^0 = 1$,
4. dla $\alpha < 0$: $a^\alpha = \frac{1}{a^{-\alpha}}$.

Własności wymiernej potęgi

● Przegląd własności funkcji elementarnych

● **Potęga**

● Wykładnicza

● Logarytm

● Potęgowa

● Trygonometryczne

● Kołowe

● Hiperboliczne

Twierdzenie 4. 1.

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}, \quad a^\alpha \cdot b^\alpha = (ab)^\alpha, \quad a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}.$$

2. Dla $a > 1$ oraz $\alpha > 0$ $a^\alpha > 1$.

3. Dla $a > 1$ funkcja a^x rośnie na zbiorze liczb wymiernych.

Dowód.

2. Założymy, że $a^{\frac{m}{n}} < 1$.

3. $a^{\frac{m_1}{n_1}} < a^{\frac{m_2}{n_2}}$ dla $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2}$.

□

Funkcja wykładnicza

- Przegląd własności funkcji elementarnych
- Potęga
- **Wykładnicza**
- Logarytm
- Potęgowa
- Trygonometryczne
- Kołowe
- Hiperboliczne

Twierdzenie 5. Niech dane będą $x, a \in \mathbb{R}, a > 1$. Istnieje jedyna liczba rzeczywista y , taka, że dla dowolnych liczb $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$,
 $\alpha < x < \beta \Rightarrow a^\alpha \leq y \leq a^\beta$.

Definicja 6. Definiujemy dla $a > 1, x \in \mathbb{R}$, potęgę a^x jako jedyną liczbę, określoną w twierdzeniu 5. Dla $0 < a < 1$ definiujemy
 $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$.

Własności funkcji wykładniczej

• Przegląd własności funkcji elementarnych

• Potęga

• **Wykładnicza**

• Logarytm

• Potęgowa

• Trygonometryczne

• Kołowe

• Hiperboliczne

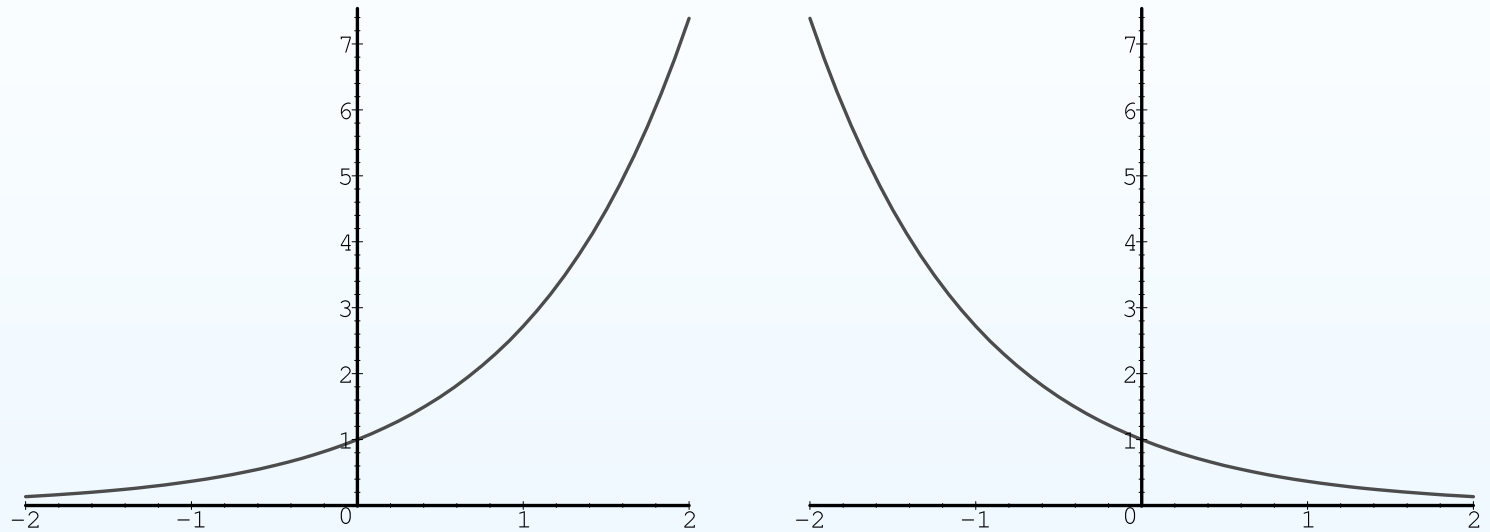
Twierdzenie 7. 1.

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}, \quad a^\alpha \cdot b^\alpha = (ab)^\alpha, \quad a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}.$$

2. *Funkcja a^x dla $a > 1$ rośnie, dla $0 < a < 1$ maleje na całą prostą.*
3. *Funkcja a^x jest ciągłą $\forall x \in \mathbb{R}$.*
4. *Funkcja a^x jest dodatnią $\forall x \in \mathbb{R}$.*
5. *Dla $a > 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, dla $0 < a < 1$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$.*
6. *Zbiorem wartości funkcji a^x ($a \neq 1$) jest półprosta $(0, +\infty)$.*

Wykres funkcji $y = a^x$

- Przegląd własności funkcji elementarnych
- Potęga
- **Wykładnicza**
- Logarytm
- Potęgowa
- Trygonometryczne
- Kołowe
- Hiperboliczne



Rysunek 1: Wykres funkcji $y = a^x$ dla $a > 1$ (po lewej) oraz dla $0 < a < 1$ (po prawej)

Logarytm

- Przegląd własności funkcji elementarnych
- Potęga
- Wykładnicza
- **Logarytm**
- Potęgowa
- Trygonometryczne
- Kołowe
- Hiperboliczne

Definicja 8. Funkcję

$\log_a x : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ definiujemy jako odwrotną do $a^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$.

Własności logarytmu

Twierdzenie 9. 1. $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$,

$$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2, \quad \log_a(x^\alpha) = \alpha \cdot \log_a x,$$

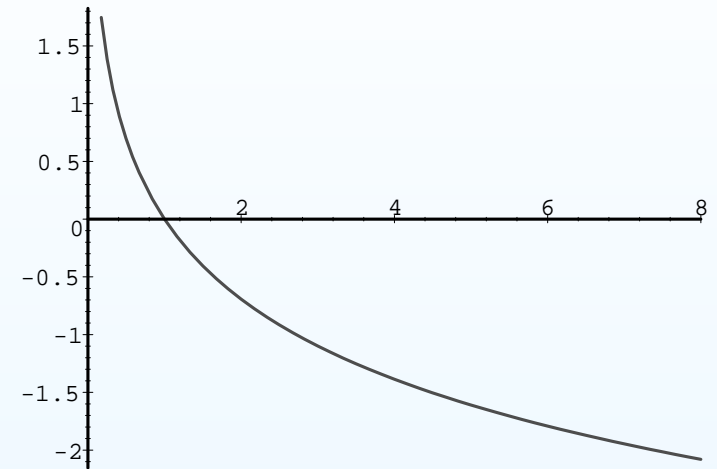
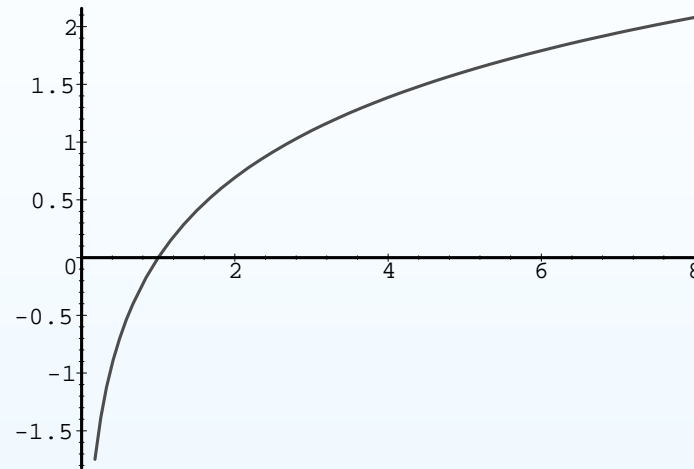
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

2. *Funkcja $y = \log_a x$ jest ciągłą i rosnącą na półprostej $(0, +\infty)$ dla $a > 1$ oraz malejącą dla $0 < a < 1$.*

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ przy $a > 1$ oraz
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$ przy $0 < a < 1$.

Wykres funkcji $y = \log_a x$

- Przegląd własności funkcji elementarnych
- Potęga
- Wykładnicza
- **Logarytm**
- Potęgowa
- Trygonometryczne
- Kołowe
- Hiperboliczne



Rysunek 2: Wykres funkcji $y = \log_a x$ dla $a > 1$ (po lewej) oraz dla $0 < a < 1$ (po prawej)

Uwaga 10. Logarytm przy podstawie e nazywa się *naturalnym* i oznacza się $\ln x$.

Funkcja potęgowa

• Przegląd własności funkcji elementarnych

• Potęga

• Wykładnicza

• Logarytm

• **Potęgowa**

• Trygonometryczne

• Kołowe

• Hiperboliczne

Definicja 11. Dla $\alpha \in \mathbb{R}$, określamy funkcję

$x^\alpha : (0, +\infty) \rightarrow (0, \infty)$ w sposób następujący: $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

Własności funkcji potęgowej

Twierdzenie 12. 1. Funkcja x^α jest funkcją ciągłą na $(0, +\infty)$.

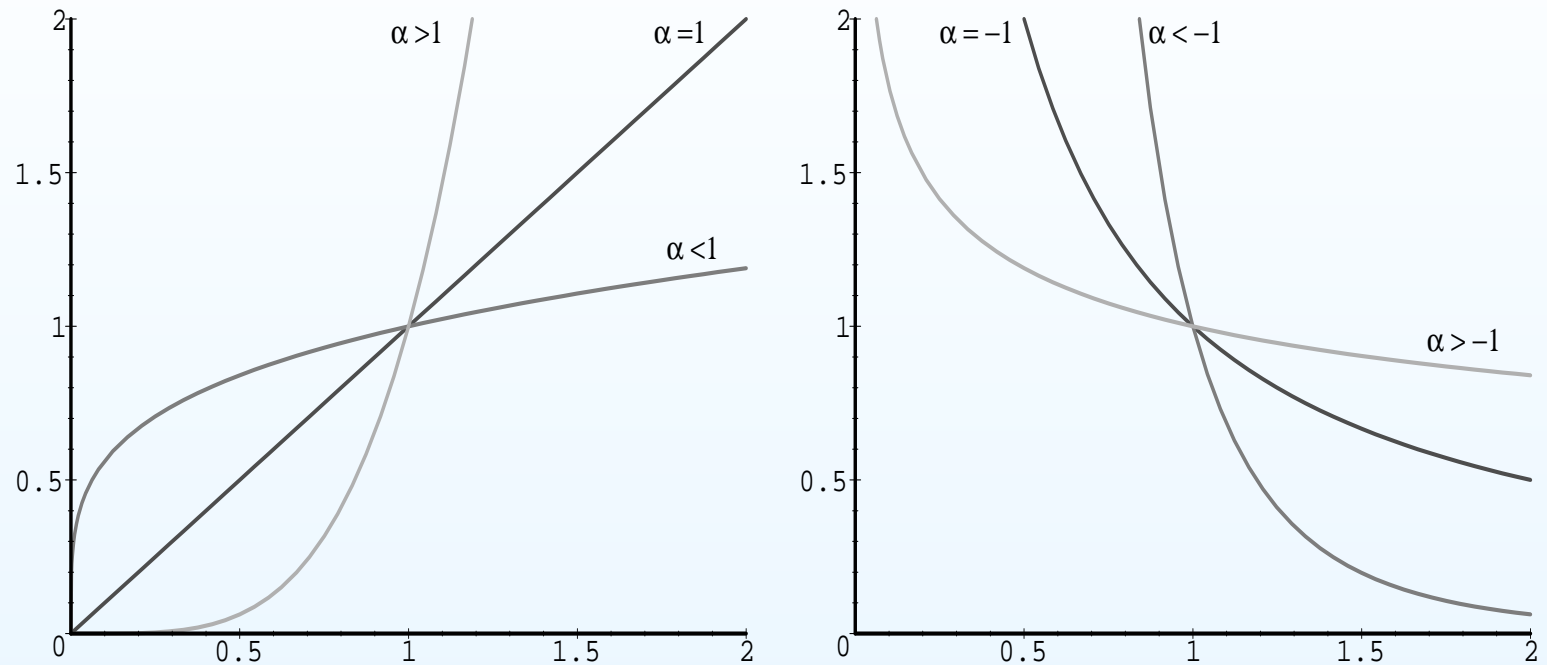
2. Funkcja x^α jest funkcją rosnącą przy $\alpha > 0$ i malejącą przy $\alpha < 0$ na przedziale $(0, +\infty)$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$ przy $\alpha > 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty$ przy $\alpha < 0$.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$ przy $\alpha > 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$ przy $\alpha < 0$.

Wykres funkcji $y = x^\alpha$

- Przegląd własności funkcji elementarnych
- Potęga
- Wykładnicza
- Logarytm
- Potęgowa
- Trygonometryczne
- Kołowe
- Hiperboliczne



Rysunek 3: Wykres funkcji $y = x^\alpha$ dla $\alpha > 0$ (po lewej) oraz dla $\alpha < 0$ (po prawej)

Podstawowe własności funkcji trygonometrycznych

• Przegląd własności funkcji elementarnych

• Potęga

• Wykładnicza

• Logarytm

• Potęgowa

• Trygonometryczne

• Kołowe

• Hiperboliczne

Twierdzenie 13. 1. $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$

2. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$

3. $\sin^2 x + \cos^2 y = 1,$

4. $\sin 0 = 0, \sin \frac{\pi}{2} = 1,$

5. $\cos 0 = 1, \cos \frac{\pi}{2} = 0,$

6. *Dla* $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $0 < \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}.$

Własności funkcji trygonometrycznych

• Przegląd własności funkcji elementarnych

• Potęga

• Wykładnicza

• Logarytm

• Potęgowa

• Trygonometryczne

• Kołowe

• Hiperboliczne

- Wniosek 14.**
1. $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1,$
 2. $\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x,$
 3. $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,$
 4. $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,$
 5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$
 6. $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2},$
 7. $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$
 8. $\sin(x + 2\pi) = \sin x, \cos(x + 2\pi) = \cos x,$
 9. $|\sin x| \leq |x|.$

Funkcje okresowe

- Przegląd własności funkcji elementarnych
- Potęga
- Wykładnicza
- Logarytm
- Potęgowa
- **Trygonometryczne**
- Kołowe
- Hiperboliczne

Definicja 15. Funkcja $f(x)$ nazywa się *okresową*, jeżeli istnieje minimalna liczba $T \in \mathbb{R}$, taka, że $\forall x$ zachodzi $f(x + T) = f(x)$. Liczba T przy tym nazywa się *okresem funkcji* $f(x)$.

Uwaga 16. Własność 8 oznacza, że funkcje $\sin x$ i $\cos x$ mają okres 2π . Można udowodnić, że 2π jest najmniejszym z okresów.

Uwaga 17. Stała funkcja nie jest okresową.

Własności funkcji $\sin x$ oraz $\cos x$. Cd.

- Przegląd własności funkcji elementarnych
- Potęga
- Wykładnicza
- Logarytm
- Potęgowa
- Trygonometryczne
- Kołowe
- Hiperboliczne

Twierdzenie 18. *Funkcje $\sin x$ oraz $\cos x$ są ciągłe na całej prostej \mathbb{R} .*

Dowód.

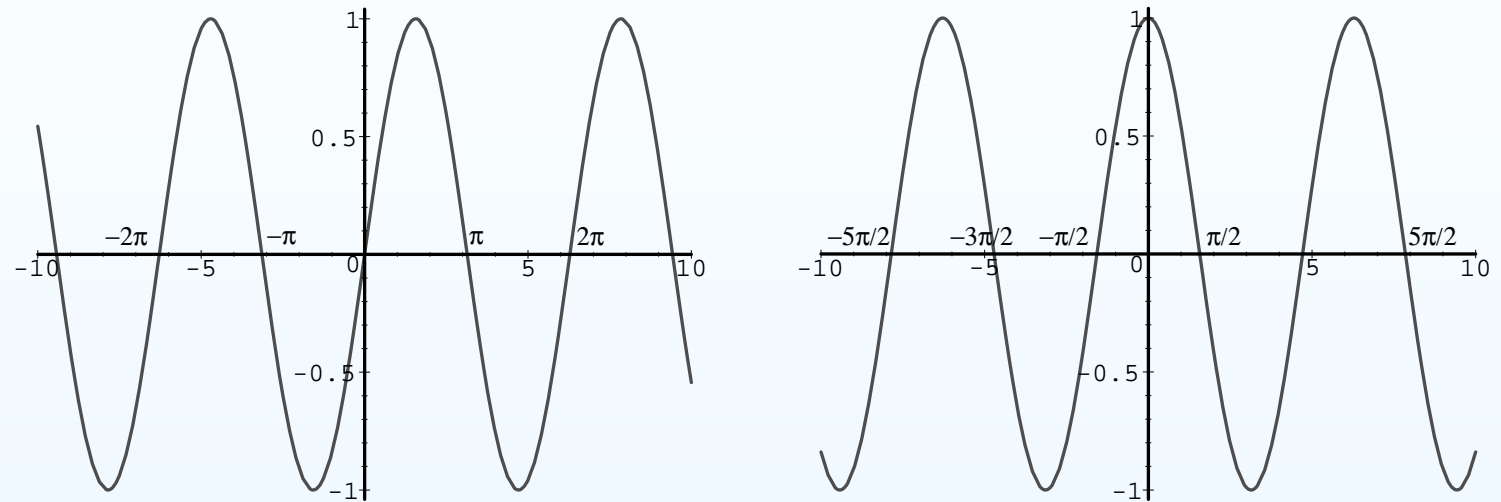
- $\sin x$ jest ciągłą w zerze.
- $\sin x - \sin x_n = 2 \cos \frac{x+x_n}{2} \sin \frac{x_n-x}{2}$ jest ciągiem nieskończone małym dla ciągu $x_n \rightarrow x$.
- $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

□

Twierdzenie 19. *Funkcja $\sin x$ rośnie na każdym z przedziałów $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ i maleje na każdym z przedziałów $\left[(2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, zaś funkcja $\cos x$ rośnie na każdym z przedziałów $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ i maleje na każdym z przedziałów $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$. Wszędzie k jest liczbą całkowitą, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.*

Wykresy funkcji $\sin x$ oraz $\cos x$

- Przegląd własności funkcji elementarnych
- Potęga
- Wykładnicza
- Logarytm
- Potęgowa
- Trygonometryczne
- Kołowe
- Hiperboliczne



Rysunek 4: Wykres funkcji $y = \sin x$ (po lewej) oraz $y = \cos x$ (po prawej)

Funkcje $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$

- Przegląd własności funkcji elementarnych
- Potęga
- Wykładnicza
- Logarytm
- Potęgowa
- Trygonometryczne
- Kołowe
- Hiperboliczne

Definicja 20. 1. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$
2. $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

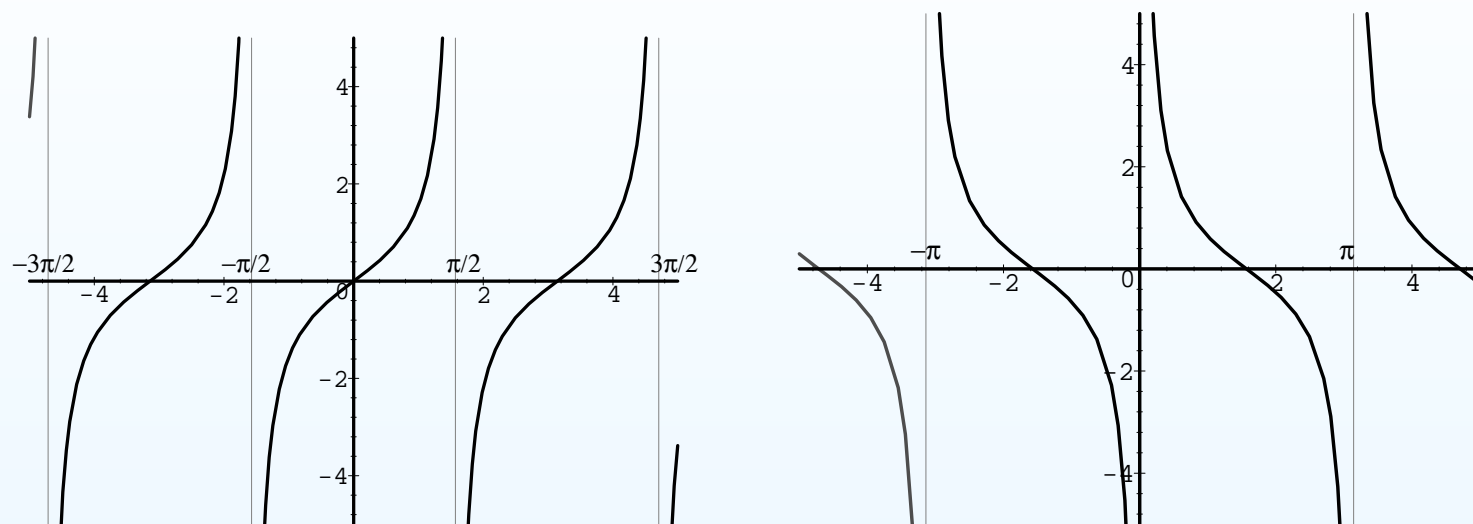
Uwaga 21. W literaturze anglojęzycznej używa się oznaczeń $\operatorname{tg} x$ oraz $\operatorname{ctg} x$.

Własności funkcji $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$

Twierdzenie 22. 1. *Funkcja $\operatorname{tg} x$ jest ciągłą przy $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, zaś funkcja $\operatorname{ctg} x$ jest ciągłą przy $x \neq k\pi$.*
2. *Funkcje $\operatorname{tg} x$ oraz $\operatorname{ctg} x$ mają okres π .*
3. *Funkcja $\operatorname{tg} x$ rośnie na każdym z przedziałów $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, zaś funkcja $\operatorname{ctg} x$ maleje na każdym z przedziałów $(k\pi, \pi + k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$).*

Wykresy funkcji $\operatorname{tg} x$ oraz $\operatorname{ctg} x$

- Przegląd własności funkcji elementarnych
- Potęga
- Wykładnicza
- Logarytm
- Potęgowa
- Trygonometryczne
- Kołowe
- Hiperboliczne



Rysunek 5: Wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$ (po lewej) oraz $y = \operatorname{ctg} x$ (po prawej)

Funkcje kołowe (odwrotne trygonometryczne funkcje)

• Przegląd własności funkcji elementarnych

• Potęga

• Wykładnicza

• Logarytm

• Potęgowa

• Trygonometryczne

• **Kołowe**

• Hiperboliczne

Definicja 23. • $\arcsin x : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ jest funkcją odwrotną do $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$.

• $\arccos x : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ jest funkcją odwrotną do $\cos x : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$.

• $\operatorname{arctg} x : (-\infty, +\infty) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ jest funkcją odwrotną do $\operatorname{tg} x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-\infty, +\infty)$.

• $\operatorname{arcctg} x : (-\infty, +\infty) \rightarrow (0, \pi)$ jest funkcją odwrotną do $\operatorname{ctg} x : (0, \pi) \rightarrow (-\infty, +\infty)$.

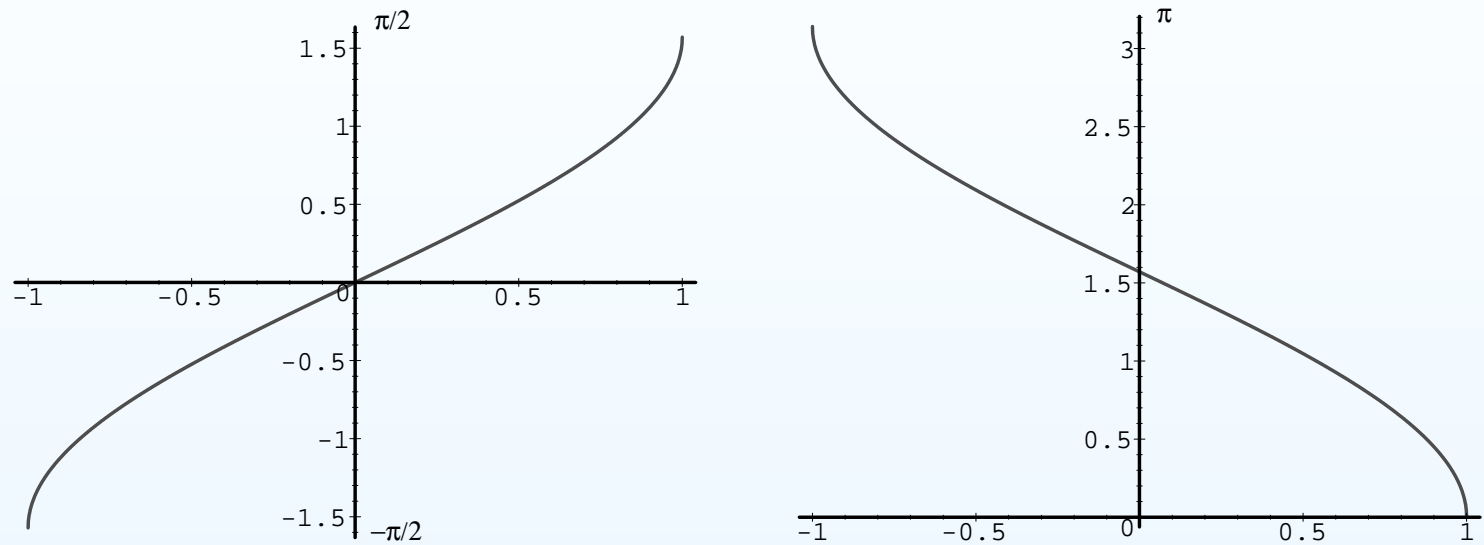
Twierdzenie 24. 1. *Wszystkie te funkcje są ciągłe,*

2. *funkcje $\arcsin x$ i $\operatorname{arctg} x$ są rosnące,*

3. *$\arccos x$ oraz $\operatorname{arcctg} x$ są malejące.*

Wykresy funkcji $\arcsin x$ oraz $\arccos x$

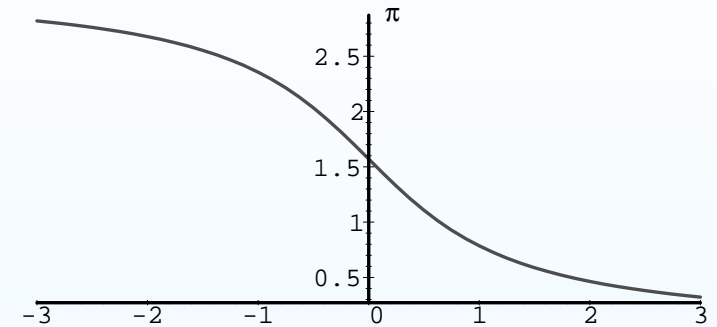
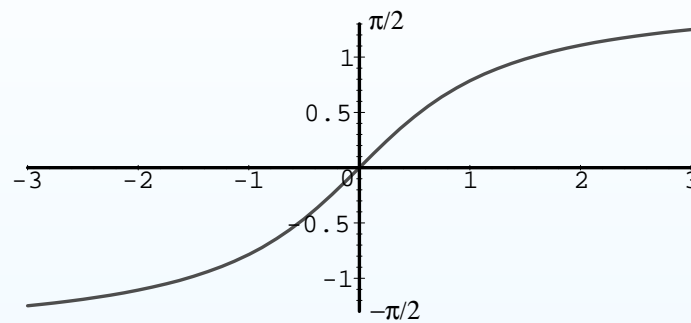
- Przegląd własności funkcji elementarnych
- Potęga
- Wykładnicza
- Logarytm
- Potęgowa
- Trygonometryczne
- **Kołowe**
- Hiperboliczne



Rysunek 6: Wykres funkcji $y = \arcsin x$ (po lewej) oraz $y = \arccos x$ (po prawej)

Wykresy funkcji $\operatorname{arctg} x$ oraz $\operatorname{arcctg} x$

- Przegląd własności funkcji elementarnych
- Potęga
- Wykładnicza
- Logarytm
- Potęgowa
- Trygonometryczne
- **Kołowe**
- Hiperboliczne



Rysunek 7: Wykres funkcji $y = \operatorname{arctg} x$ (po lewej) oraz $y = \operatorname{arcctg} x$ (po prawej)

Funkcje hiperboliczne

● Przegląd własności funkcji elementarnych

● Potęga

● Wykładnicza

● Logarytm

● Potęgowa

● Trygonometryczne

● Kołowe

● Hiperboliczne

- Definicja 25.** 1. Funkcja $\sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ nazywa się *sinusem hiperbolicznym*
2. Funkcja $\cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ nazywa się *cosinusem hiperbolicznym*
3. Funkcja $\operatorname{tgh} = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ nazywa się *tangensem hiperbolicznym*
4. Funkcja $\operatorname{ctgh} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ nazywa się *cotangensem hiperbolicznym*

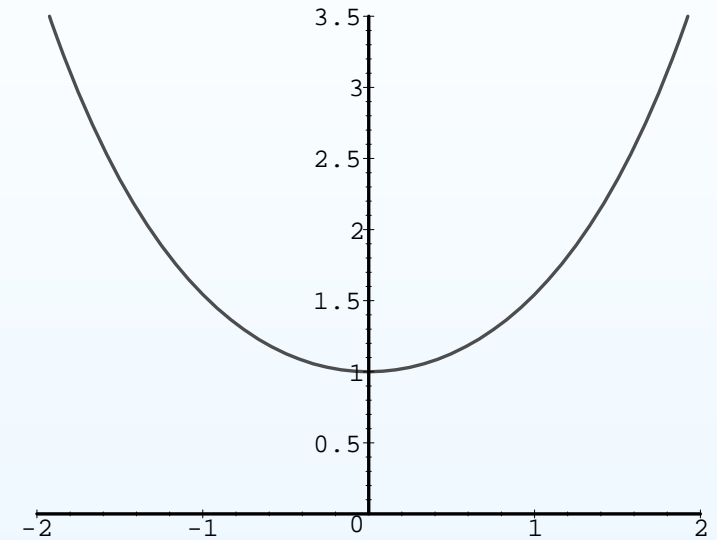
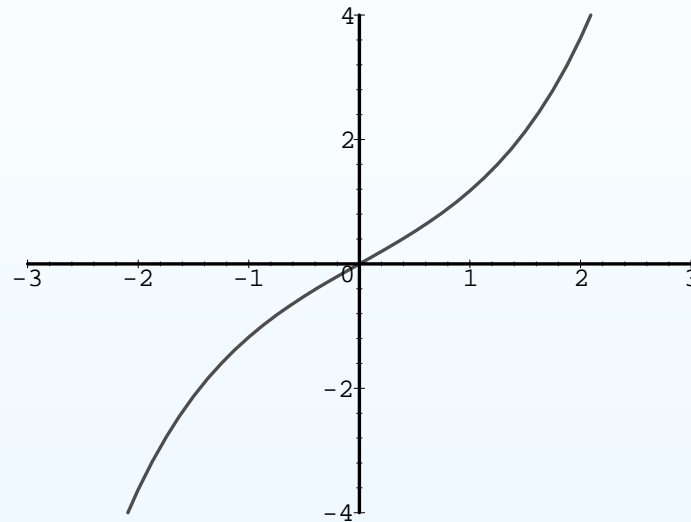
Twierdzenie 26. *Funkcje hiperboliczne są ciągłe we wszystkich punktach prostej \mathbb{R} (cotangens hiperboliczny oprócz punktu $x = 0$).*

Twierdzenie 27.

$$\begin{aligned}\sinh(x + y) &= \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y, \\ \cosh(x + y) &= \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y.\end{aligned}$$

Wykresy funkcji $\sinh x$ oraz $\cosh x$

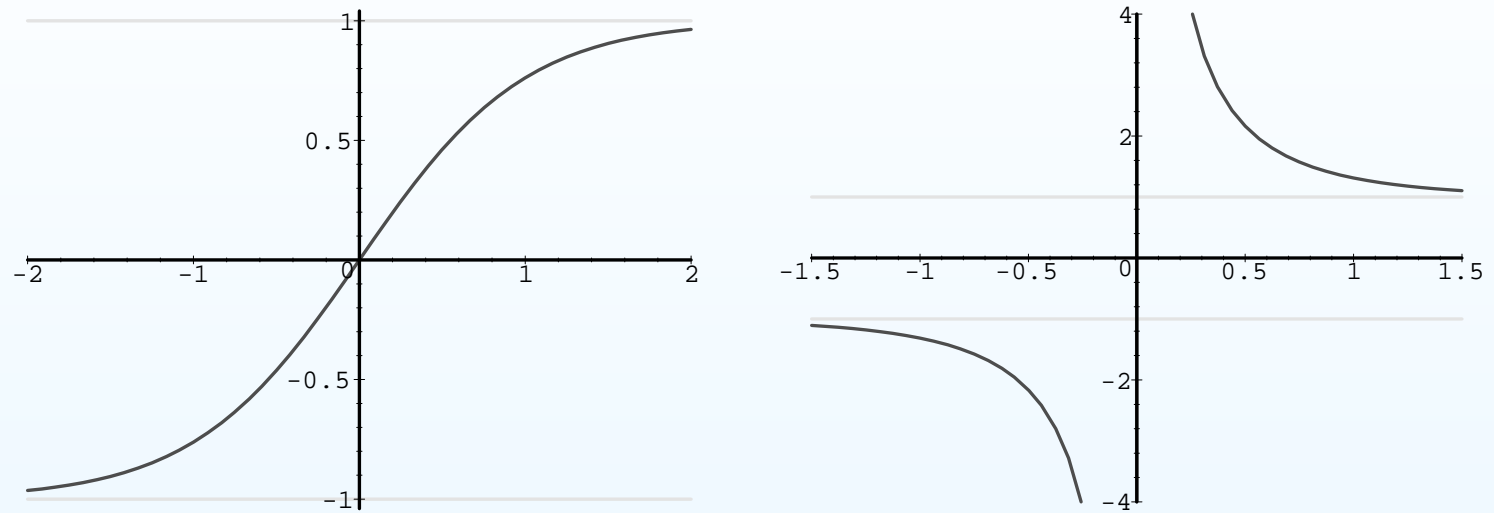
- Przegląd własności funkcji elementarnych
- Potęga
- Wykładnicza
- Logarytm
- Potęgowa
- Trygonometryczne
- Kołowe
- Hiperboliczne



Rysunek 8: Wykres funkcji $y = \sinh x$ (po lewej) oraz $y = \cosh x$ (po prawej)

Wykresy funkcji $\operatorname{tgh} x$ oraz $\operatorname{ctgh} x$

- Przegląd własności funkcji elementarnych
- Potęga
- Wykładnicza
- Logarytm
- Potęgowa
- Trygonometryczne
- Kołowe
- **Hiperboliczne**



Rysunek 9: Wykres funkcji $y = \operatorname{tgh} x$ (po lewej) oraz $y = \operatorname{ctgh} x$ (po prawej)

Dwie granice

● Przegląd własności funkcji elementarnych

● Potęga

● Wykładnicza

● Logarytm

● Potęgowa

● Trygonometryczne

● Kołowe

● Hiperboliczne

Twierdzenie 28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Twierdzenie 29. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e.$