Analiza Matematyczna. Ciągi rzeczywiste i teoria zbieżności

Aleksander Denisiuk
denisiuk@pjwstk.edu.pl
Polsko-Japońska Wyższa Szkoła Technik Komputerowych
Wydział Informatyki w Gdańsku
ul. Brzegi 55
80-045 Gdańsk

12 marca 2017

Ciągi rzeczywiste i teoria zbieżności

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem `http://users.pjwstk.edu.pl/~denisjuk/`

Definicja ciągów

Definicja 1. Jeżeli każdej liczbę naturalnej $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ jest podporządkowana liczba rzeczywista x_n, to zbiór numerowanych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ nazywa się *ciągiem rzeczywistym.* Liczby rzeczywiste x_n nazywają się *elementami ciągu* $\{\, x_n \,\}$.

Przyklady

Przykład 2. • $\{\, \frac{1}{n^2} \,\} = 1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots,$
• $\{\, 1 + (-1)^n \,\} = 0, 2, 0, 2, \ldots.$

Działania na ciągach

Definicja 3. 1. Ciąg $\{x_n \pm y_n\}$ nazywa się *sumą (różnicą)* ciągów $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$,

2. Ciąg $\{\lambda x_n\}$ nazywa się *iloczynem* liczby rzeczywistej λ i ciągu $\{x_n\}$.
3. Ciąg $\{x_n y_n\}$ nazywa się *iloczynem* ciągów $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$.
4. Niech $y_n \neq 0$ dla $n = 1, 2, \dots$ Ciąg $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ nazywa się *ilorazem* ciągów $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$.

Uwaga 4. Jeżeli w definicji 3.4 $y_n = 0$ tylko dla skończonej ilości n, to można określić $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ poczynając z numeru, dla którego $y_n \neq 0$.

Ciągi ograniczone i nieograniczone

Definicja 5. Ciąg $\{ x_n \}$ nazywa się *ograniczonym z góry (z dołu),* jeżeli $\exists M \in \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$), takie że każdy element ciągu spełnia nierówność $x_n \leqslant M$ ($x_n \geqslant m$).
Ciąg, ograniczony z dołu i z góry nazywa się *ograniczonym.*
Oznaczenie: $x_n = O(1)$ (przy $n \to \infty$).

Lemat 6. *Ciąg* $\{ x_n \}$ *jest ograniczonym* $\iff \exists A \in \mathbb{R}$*, takie że* $\forall n = 1, 2, 3, \dots |x_n| \leqslant A$*.*

Definicja 7. Ciąg $\{ x_n \}$ nazywa się *nieograniczonym,* jeżeli $\forall A \in \mathbb{R}, A > 0\ \exists x_n$, takie że $|x_n| > A$.

Przykład 8.
1. Ciąg $1, 2, 1, 4, 1, 6, \dots, 1, 2n, \dots$ jest nieograniczonym.
2. Ciąg $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ jest ograniczonym.

Ciągi nieskończenie duże

Definicja 9. Ciąg $\{ x_n \}$ nazywa się *nieskończenie dużym,* jeżeli $\forall A \in \mathbb{R}, A > 0 \; \exists n \in \mathbb{N}$, takie że $\forall n > N \quad |x_n| > A$.
Oznaczenie: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.
Innymi słowy: poczynając od pewnego n wszystkie x_n należą do otoczenia nieskończoności.

Definicja 10.
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ jeżeli $\forall A \in \mathbb{R}, A > 0 \; \exists n \in \mathbb{N}$, takie że $\forall n > N \quad x_n > A$ (poczynając od pewnego n wszystkie x_n należą do otoczenia plus nieskończoności).
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ jeżeli $\forall A \in \mathbb{R}, A > 0 \; \exists n \in \mathbb{N}$, takie że $\forall n > N \quad x_n < -A$ (poczynając od pewnego n wszystkie x_n należą do otoczenia minus nieskończoności).

Przykład 11. 1. $1, 2, 1, 4, 1, 6, \ldots, 1, 2n, \ldots$
2. $\{ (-2)^n \}$
3. $\{ n^2 \}$

Ciągi nieskończenie małe

Definicja 12. Ciąg $\{ x_n \}$ nazywa się *nieskończenie małym,* jeżeli $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N}$, takie że $\forall n > N \quad |x_n| < \varepsilon$.
Oznaczenia: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0, \quad x_n = o(1)$ (przy $n \to \infty$).
Innymi słowy: poczynając z pewnego n wszystkie x_n należą do otoczenia zera.

Przykład 13. Ciąg $q, q^2, \ldots, q^n, \ldots$ jest nieskończenie dużym przy $|q| > 1$ i nieskończenie małym przy $|q| < 1$.

Właściwści ciągów nieskończenie małych

Twierdzenie 14.
- *Suma nieskończenie małych ciągów jest ciągiem nieskończenie małym.*
- *Różnica nieskończenie małych ciągów jest ciągiem nieskończenie małym.*
- *Iloczyn ciągu ograniczonego i ciągu nieskończenie małego jest ciągiem nieskończenie małym.*
- *Ciąg nieskończenie mały jest ograniczonym.*
- *Iloczyn ciągów nieskończenie małych jest ciągiem nieskończenie małym.*
- *Jeżeli ciąg jest stałym ($x_n = \mathrm{const}$) i nieskończenie małym, to $x_n = 0$.*
- *Jeżeli ciąg $\{\, x_n \,\}$ jest nieskończenie dużym, to ciąg $\left\{\, \frac{1}{x_n} \,\right\}$ (poprawnie określony poczynając z pewnego n) jest nieskończenie małym.*

Ciągi zbieżne

Definicja 15. Ciąg $\{ x_n \}$ nazywa się *zbieżnym,* jeżeli istnieje liczba rzeczywista $a \in \mathbb{R}$, taka że ciąg $\{ x_n - a \}$ jest nieskończenie małym. Liczba a nazywa się *granicą ciągu*. Oznaczenie

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{lub} \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a.$$

Definicja 16. Ciąg $\{ x_n \}$ nazywa się *zbieżnym,* jeżeli istnieje liczba rzeczywista $a \in \mathbb{R}$, taka że $\forall \varepsilon > 0$ istnieje numer $N \in \mathbb{N}$, taki że $\forall n > N$ zachodzi nierówność $|x_n - a| < \varepsilon$.

Definicja 17. Ciąg $\{ x_n \}$ nazywa się *zbieżnym,* jeżeli istnieje liczba rzeczywista $a \in \mathbb{R}$, taka że w dowolnym otoczeniu (ε-otoczeniu) punktu a znajdują się wszystkie elementy ciągu $\{ x_n \}$ poczynając od pewnego n.

Definicja 18. Ciąg, który nie jest zbieżnym, nazywa się *rozbieżnym.*

Przykład 19. $0,\underbrace{33333\ldots3}_{n \text{ razy}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}.$

Właściwości ciągów zbieżnych

Twierdzenie 20. • *Ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę.*

- *Ciąg zbieżny jest ograniczonym.*
- *Suma (różnica, iloczyn) zbieżnych ciągów jest ciągiem zbieżnym do sumy (różnicy, iloczynu) granic.*
- *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, *to ciąg* $\left\{ \frac{1}{y_n} \right\}$ *jest określony poczynając z pewnego* n *i jest ograniczony.*
- *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, *i ciąg* $\{ x_n \}$ *jest zbieżny, to iloraz* $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ *jest określony poczynając z pewnego* n *i jest zbieżnym do ilorazu granic.*
- *Jeżeli* $\{ x_n \}$ *jest zbieżnym i poczynając z pewnego* n *zachodzi nierówność* $x_n \geqslant b$ *(*$x_n \leqslant b$*), to* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant b$ *(*$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant b$*).*

Właściwości ciągów zbieżnych, cd.

- Jeżeli ciągi $\{ x_n \}$ i $\{ y_n \}$ są zbieżne i poczynając z pewnego n zachodzi nierówność $x_n \geqslant y_n$, to $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.
- Jeżeli ciągi $\{ x_n \}$ i $\{ y_n \}$ są zbieżne, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ i poczynając z pewnego n zachodzi nierówność $x_n \geqslant z_n \geqslant y_n$, to ciąg $\{ z_n \}$ jest zbieżnym do tej samej granicy.

Ciągi monotoniczne

Definicja 21.
- Ciąg $\{ x_n \}$ nazywa się *rosnącym,* jeżeli $x_n < x_{n+1}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$.
- Ciąg $\{ x_n \}$ nazywa się *malejącym,* jeżeli $x_n > x_{n+1}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$.
- Ciąg $\{ x_n \}$ nazywa się *niemalejącym,* jeżeli $x_n \leqslant x_{n+1}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$.
- Ciąg $\{ x_n \}$ nazywa się *nierosnącym,* jeżeli $x_n \geqslant x_{n+1}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$.
- Ciąg nazywa się *monotonicznym,* jeżeli jest on nierosnącym lub niemalejącym.

Twierdzenie o ograniczonym ciągu monotonicznym

Twierdzenie 22. *Monotoniczny ograniczony ciąg jest zbieżnym.*

Twierdzenie o przedziałach zstępujących

Definicja 23. Ciąg przedziałow $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots$ nazywa się *ciągiem przedziałów zstępujących,* jeżeli

1. $a_n \leqslant a_{n+1}, b_{n+1} \leqslant b_n$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots,$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.

Twierdzenie 24. *Ciąg przedziałów zstępujących ma dokładnie jeden punkt należący do każdego przedziału ciągu.*

Liczba e

Twierdzenie 25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,352\,662\ \ldots$

Dowód. Ciąg jest rosnący i ograniczony z góry. $\square$

Przybliżone obliczenie pierwiastka

Twierdzenie 26. *Niech* $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n = 1, 2, 3 \ldots,$ *gdzie* $a > 0$, $x_1 > 0$.
Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

Dowód.

1. $x_n > 0$.
2. $x_{n+1} = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right) \geqslant \sqrt{a}$ bowiem $t + 1/t \geqslant 2$.
3. $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right) \leqslant 1$.

Więc ciąg jest malejącym (dla $n > 2$) i ograniczonym z dołu i jego granica spełnia równanie $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. $\square$

Twierdzenie 27.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t^n}{n!} = 0.$$

Dowód.

1. Poczynając od pewnego n zachodzi nierówość $|t| < n+1$.
2. $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{t}{n+1} < 1$ poczynając od pewnego n.

Więc ciąg jest malejącym poczynając od pewnego n i ograniczonym z dołu i go granica spełnia równość $x = x \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|t|}{n+1} = 0$. □

Dowolne ciągi. Kryterium Cauchy'ego zbieżności ciągu

Twierdzenie 28. *Ciąg* $\{ x_n \}$ *jest zbieżnym*
$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$, *takie że* $\forall n, m > N \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$.