# Analiza Matematyczna. Teoria Liczb Rzeczywistych

Aleksander Denisiuk
denisiuk@pjwstk.edu.pl
Polsko-Japońska Wyższa Szkoła Technik Komputerowych
Wydział Informatyki w Gdańsku
ul. Brzegi 55
80-045 Gdańsk

12 marca 2017

## Teoria Liczb Rzeczywistych

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem
`http://users.pjwstk.edu.pl/~denisjuk/`

# Liczby Wymierne

# Zbiory Liczbowe

- $\mathbb{N} = \{ 1, 2, \dots \}$ — zbiór liczb naturalnych,
- $\mathbb{Z}$ — zbiór liczb całkowitych,
- $\mathbb{Q}$ — zbiór liczb wymiernych,
- $\mathbb{R}$ — zbiór liczb rzeczywistych.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

## Liczby wymierne

- $\mathbb{Q}^* = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\},$
- $\frac{m_1}{n_1} \sim \frac{m_2}{n_2} \iff m_1 n_2 = m_2 n_1,$
- $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^* / \sim,$
- $\mathbb{Q}$ jest ciałem ułamków pierścienia $\mathbb{Z}$.

# Dodawanie liczb wymiernych

## Definicja 1.

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + n_1 m_2}{n_1 n_2}$$

- $\forall x, y \in \mathbb{Q} \quad x + y = y + x$ (przemienność dodawania),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{Q} \quad (x + y) + z = x + (y + z)$ (łączność dodawania),
- Istnieje liczba $0 \in \mathbb{Q}$, taka że $\forall x \in \mathbb{Q} \quad x + 0 = 0 + x = x$ (liczba neutralna),
- $\forall x \in \mathbb{Q}$ istnieje liczba przeciwna $(-x) \in \mathbb{Q}$, taka że $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

# Mnożenie liczb wymiernych

**Definicja 2.**

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}$$

- $\forall x, y \in \mathbb{Q} \quad xy = yx$ (przemienność mnożenia),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{Q} \quad (xy)z = x(yz)$ (łączność mnożenia),
- Istnieje liczba $1 \in \mathbb{Q}$, taka że $\forall x \in \mathbb{Q} \quad 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.
- $\forall x, y, z \in \mathbb{Q} \quad x(y + z) = xy + xz$ oraz $(x + y)z = xz + yz$ (rozdzielność mnożenia względem dodawania),
- $\forall x \in \mathbb{Q},\ x \neq 0 \quad \exists x^{-1} \in \mathbb{Q}$ (element odwrotny) taki że $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$

# Porównywanie liczb wymiernych

## Definicja 3.

$$\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2} \iff \begin{array}{l} \left(m_1 n_2 < m_2 n_1 \text{ i } n_1 n_2 > 0\right) \\ \text{albo} \\ \left(m_1 n_2 > m_2 n_1 \text{ i } n_1 n_2 < 0\right) \end{array}$$

- $a > b \Rightarrow a + c > b + c$,
- $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$.

## Aksjomat Archimedesa

**Twierdzenie 4.** *Dla dowolnej liczby $a \in \mathbb{Q}$ jedynkę $(1)$ można powtórzyć tyle razy, że suma zostanie większa od $a$.*

- Nieograniczoność zbioru liczb wymiernych.
- Dowolny odcinek jest krótszy od pewnej wielokrotności każdego innego odcinka.

## Podstawowe własnoći liczb wymiernych

- Dowolna własność liczb wymiernych jest wnioskiem 16 podstawowych.

**Przykład 5.** Niech $a > b$ oraz $c > d$. Wtedy $a + c > b + d$.

# Niezupełność zbioru liczb wymiernych

**Twierdzenie 6.**

$$\sqrt{2} \neq \mathbb{Q}$$

*Dowód.*

- Załóżmy, że

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \quad \text{(ułamek nieskracalny).} \tag{1}$$

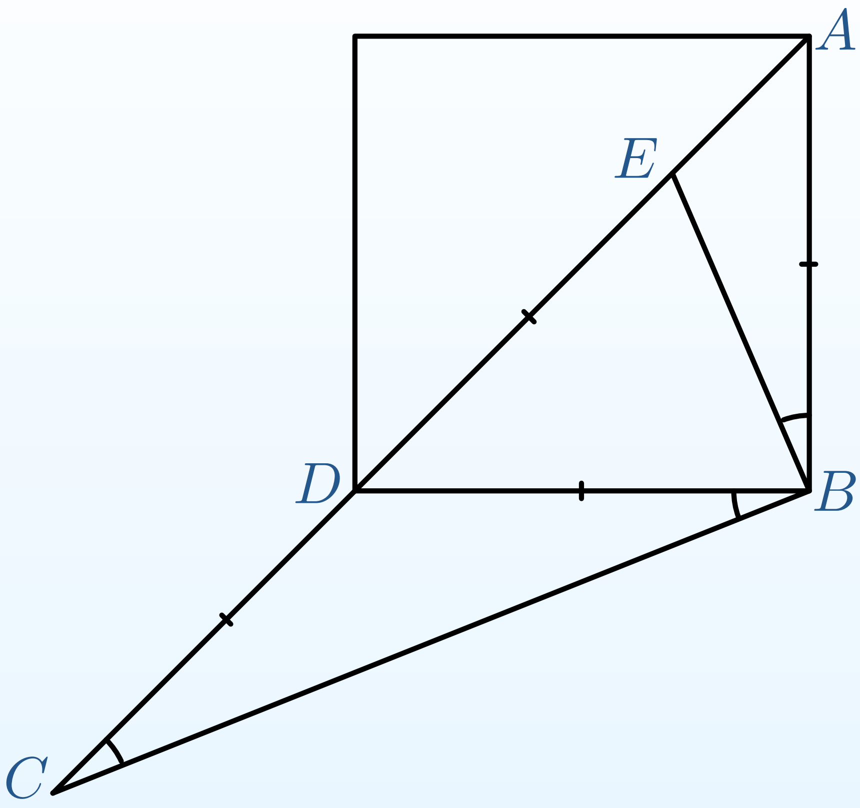
- Wtedy $m^2 = 2n^2$ czyli $m$ jest liczbą parzystą, $m = 2m_1$.
- Podstawiając do (1), otrzymamy po skróceniu

$$2m_1^2 = n^2,$$

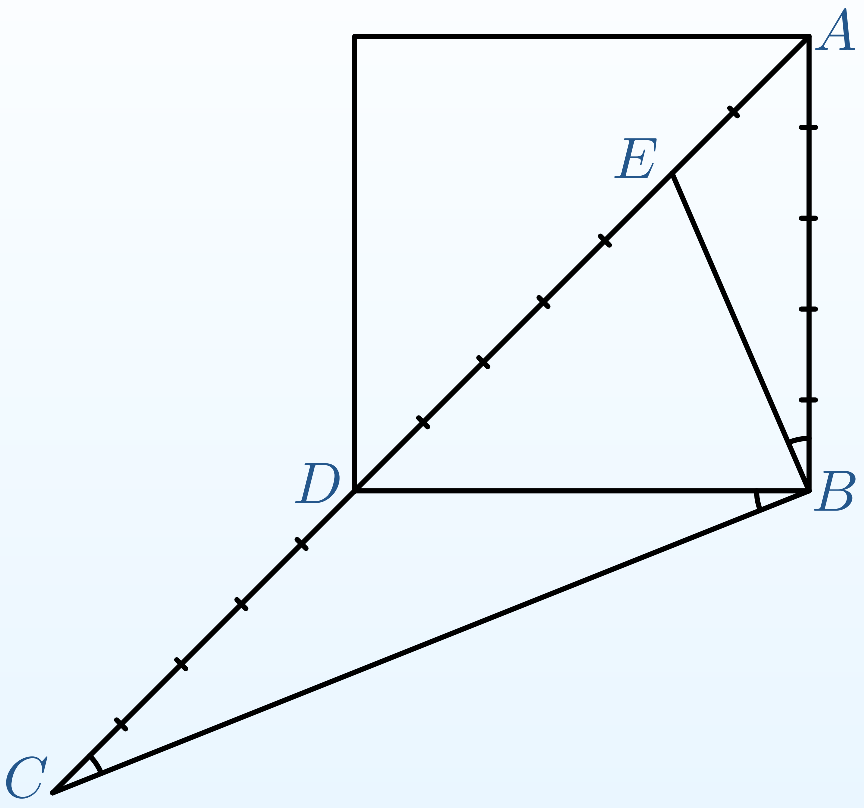
  czyli $n$ też jest liczbą parzystą.
- Sprzeczność.

$\square$

# Niezupełność zbioru liczb wymiernych



# Niezupełność zbioru liczb wymiernych



# Liczby Rzeczywiste

## Liczby rzeczywiste. Definicja przez własności

- Zbiór $\mathbb{R}$ jest uzupełnieniem zbioru $\mathbb{Q}$:
  - jest ciałem względem dodawania i mnożenia,
  - okreslona relacja mniejszoćsi,
  - spełniony jest aksjomat Archimedesa,
  - spełniony jest aksjomat ciągłości

**Aksjomat 7** (Aksjomat ciągłości)**.** *Niech zbiór $\mathbb{R}$ będzie podzielony na dwa niepuste podzbiory $A$ i $B$: $\mathbb{R} = A \cup B$ w ten sposób, że każda liczba $A$ jest mniejsza od każdej liczby $B$, to wówczas zachodzi jedna z dwóch możliwości: albo w zbiorze $A$ istnieje największy element, albo w zbiorze $B$ istnieje najmniejszy element.*

# Liczby rzeczywiste. Sposób konstruktywny

- $a = a_0{,}a_1a_2a_3\ldots, \quad a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ dla $i > 0$,
- $a_0{,}a_1a_2a_3\ldots a_n000\ldots = a_0{,}a_1a_2a_3\ldots(a_n - 1)999\ldots$
- $0{,}5000\ldots = 0{,}4999\ldots$

## Kresy zbioru

- Niech $A$ będzie podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych, $A \subset \mathbb{R}$.

**Definicja 8.** Zbiór $A$ jest *ograniczonycm z góry (z dołu),* jeżeli istnieje liczba $M \in \mathbb{R}$, taka że $\forall x \in A \Rightarrow x \leqslant M$ (względnie $x \geqslant M$). Zbiór, ograniczony z dołu i z góry nazywa się *ograniczonym.*

**Definicja 9.** Element $M \in A$ nazywa się *maksymalnym (minimalnym),* jeżeli $\forall x \in A \Rightarrow x \leqslant M$ ($x \geqslant M$): $M = \max A$ ($\min A$).

**Definicja 10.** Najmniejsza z liczb $M \in \mathbb{R}$, takich że $\forall x \in A \Rightarrow x \leqslant M$, jest *górnym kresem* zbioru $A$: $M = \sup A$.

**Definicja 11.** Największa z liczb $M \in \mathbb{R}$, takich że $\forall x \in A \Rightarrow x \geqslant M$, jest *dolnym kresem* zbioru $A$: $M = \inf A$.

# Kresy zbioru. Twierdzenie

**Twierdzenie 12.** *Niepusty zbiór ograniczony z góry (z dołu) ma górny (dolny) kres.*

*Dowód.*

- Rozważamy zbiór ograniczony z góry.
- Określimy dwa podzbiory $\mathbb{R}$: $A_1 = \{\, y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A, x \leqslant y \,\}$ i $A_2 = \{\, z \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A, x > z \,\}$.
- $A_1$ jest *dopełnieniem* $A_2$.
- $A_1$ jest niepustym.
- $A_2$ jest niepustym.
- $\forall y \in A_1, \forall z \in A_2$ spełnia się nierówność $z < y$, ponieważ $\exists x \in A$, $z < x$ i $x \leqslant y$.
- Za mocą aksjomatu ciągłości istnieje albo najmniejszy element $A_1$, albo największy element $A_2$.

*–verte–*

## Kresy zbioru, cd

*Dowód. cd.*

- $A_2$ nie ma największego elementu.
- A więc $\min A_1 = \sup A$.

$\square$

**Przykład 13.** Niech $A = \{ 1/n \mid n \in \mathbb{N} \} \subset \mathbb{R}$. Wtedy:

- $\sup A = 1$,
- $\inf A = 0$,
- $\max A = 1$,
- $\min A$ nie istnieje.

## Wartość bezwzględna

**Definicja 14.**

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

**Twierdzenie 15.** *1.* $|ab| = |a| \cdot |b|$,
*2.* $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.

*Dowód.* $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$, $-|b| \leqslant b \leqslant |b| \Rightarrow -(|a|+|b|) \leqslant a + b \leqslant (|a|+|b|)$ □

## Podzbiory $\mathbb{R}$

**Definicja 16.**
- Zbiór $\{ x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b \}$, gdzie $a < b$, nazywa się *przedziałem domkniętym,* oznacza się przez $[a, b]$. Punkty $a$ i $b$ — to są *kresy* albo *końce* przedziału, a dowolna liczba $x$, $a < x < b$ jest punktem wewnętrznym przedziału.
- Zbiór $\{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$, gdzie $a < b$, nazywa się *przedziałem otwartym,* oznacza się przez $(a, b)$.
- Zbiór $\{ x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b \}$ ($\{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b \}$) nazywa się *przedziałem półotwartym,* oznacza się przez $[a, b)$ (względnie $(a, b]$).
- Zbiór $\mathbb{R}$ oznaczamy przez $(-\infty, +\infty)$, nazywamy również *prostą.* Jeżeli $x < y$, to mówimy, że $x$ jest *po lewej* od $y$, $y$ jest *po prawej* od $x$.
- Zbiór $\{ x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \}$ ($\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b \}$) nazywa się *półprostą,* oznacza się przez $[a, +\infty)$ (względnie $(-\infty, b]$).
- Zbiór $\{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \}$ ($\{ x \in \mathbb{R} \mid x < b \}$) nazywa się *półprostą otwartą,* oznacza się przez $(a, +\infty)$ (względnie $(-\infty, b)$).

## Otoczenia punktu

**Definicja 17.**
- Przedział $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ (gdzie $\varepsilon > 0$) jest $\varepsilon$-*otoczeniem* punktu $a$.
- Dowolny przedział otwarty, zawierający punkt $a$ jest *otoczeniem* punktu $a$.
- Przedział $(a-\varepsilon a) \cup (a, a+\varepsilon)$ (gdzie $\varepsilon > 0$) jest $\varepsilon$-*sąsiedztwem* punktu $a$.
- Dowolny przedział otwarty, zawierający punkt $a$ z wyłączeniem jego samego jest *sąsiedztwem* punktu $a$.
- Przedział $(a-\varepsilon, a)$ (gdzie $\varepsilon > 0$) jest *lewym otoczeniem* punktu $a$.
- Przedział $(a, a+\varepsilon)$ (gdzie $\varepsilon > 0$) jest *prawym otoczeniem* punktu $a$.

## Otoczenie nieskończoności

**Definicja 18.**
- Zbiór $\{\, x \in \mathbb{R} \mid A < |x| \,\}$, gdzie $A > 0$, nazywa się *otoczeniem nieskończoności ($\infty$).*
- Zbiór $\{\, x \in \mathbb{R} \mid A < x \,\}$, gdzie $A > 0$, nazywa się *otoczeniem plus nieskończoności ($+\infty$).*
- Zbiór $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x < -A \,\}$, gdzie $A > 0$, nazywa się *otoczeniem minus nieskończoności ($-\infty$).*

*Uwaga* 19. Przedział nazywa się również *odcinkiem.* Zamiast nawiasów kwadratowych $[\,]$ używa się również nawiasów kątowych: $\langle\,\rangle$.