Analiza Matematyczna. Wprowadzenie

Aleksander Denisiuk
denisiuk@pjwstk.edu.pl
Polsko-Japońska Wyższa Szkoła Technik Komputerowych
Wydział Informatyki w Gdańsku
ul. Brzegi 55
80-045 Gdańsk

3 marca 2017

Wprowadzenie

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem
`http://users.pjwstk.edu.pl/~denisjuk/`

Teoria Mnogości

Zbiory

- Zbiór jest dany, jeżeli są znane wszystkie jego elementy
  - $\{1, 2, 3, 4\}$
  - {jesień, zima, wiosna, lato}
  - {wszystkie województwa Polski}
  - {liczby naturalne}, $\mathbb{N}$
- $a \in A$
- Dwa zbiory są równe, jeżeli składają się z tych samych elementów $A = B$
  - każdy element liczy się jeden raz
  - kolejność nie ma znaczenia
    - $\{1, 2, 3, 4\} = \{4, 3, 1, 2\} = \{1, 2, 2, 2, 2, 3, 4\}$
- Zbiory liczbowe: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Określenie poprzez własność, zbiór pusty

- { liczby parzyste } $= \{\, n | n$ jest liczbą parzystą $\}$
- $F = \{\, n|$ istnieje rozwiązanie równania $x^n + y^n = z^n$ w dodatnich liczbach naturalnych }
- kwantyfikatory $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$, $\iff$, $\vee$, $\wedge$
  - $F = \{\, n | (\exists x, y, z \in \mathbb{N}_+) \wedge (x^n + y^n = z^n) \,\}$
- $\left\{\, x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 1 = 0 \,\right\}$
  - zbiór pusty: $\emptyset$
- Pozdzbiory: $A \subset B \iff \forall x \in A \Rightarrow x \in B$
  - $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
  - $\emptyset \subset X \subset X$
- Paradoks Russella $V = \{\, X : X \notin X \,\}$

Algebra zbiorów

- $A, B, C, \ldots, \subset X$
- $A \cup B$
- $A \cap B$
- $A \setminus B$
- $\bar{A} = X \setminus A$
- $A \cap B = B \cap A$ oraz $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ oraz
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ oraz
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$
- Prawa de Morgana: $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ oraz
  $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ oraz $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- Wykresy Venna
- Tabele przynależności

- Wprowadzenie

Teoria Mnogości

- Zbiory
- Algebra zbiorów
- Iloczyn Kartezjański i relacje

Funkcje

Iloczyn Kartezjański i relacje

- $A \times B$

Relacja $\rho \subset A \times A$.

- zwrotna
- przechodnia
- symetryczna
- równoważności
  - klasy abstrakcji
- antysymetryczna
- relacja uporządkowania

Funkcje

Funkcje jako wzory

- $y = f(x)$
- Argument, wartość, zmiennna
  - $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$, $y = 7x^4 + \frac{\sin x}{1+x}$
  - $y = \log(\log(\sin x))$
    - $y' = \frac{\operatorname{ctg} x}{\log(\sin x)}$
- Wzory?
  - $f(x) = [x]$
  - $f(x) = \begin{cases} (x+1) & \text{dla } x < -1, \\ (x+1) & \text{dla } -1 \leqslant x \leqslant -1, \\ (x+1) & \text{dla } 1 < x, \end{cases}$
  - $f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots$
  - $f(x) = \mathrm{Ai}(x)$

Ogólne funkcje

- $f : X \to Y$
  - X — dziedzina, Y — przeciwdziedzina, sposób przyporządkowania $f : x \mapsto y$
    - zbiór wartości
  - $\forall x \in X \; \exists$ jednoznaczne $y \in Y$, takie że $y = f(x)$
- X jest zbiorem wszystkich okręgów, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) =$ promień x
- $X = \mathbb{N}_+$, Y — zbiór wszystkich zbiorów liczb pierwszych, $f(x) =$ zbiór prostych dzielników x
- $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2 + 1)$
- Dwie funkcje $f_1 : X_1 \to Y_1$ oraz $f_2 : X_2 \to Y_2$ są równe, jeżeli $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ oraz $\forall x \in X_1 \quad f_1(x) = f_2(x)$

Funkcje jako relacje

- Relacja $\rho \subset X \times Y$ nazywa się funkcją, jeżeli $\forall x \in X$ $\exists$ jednoznaczne $y \in Y$, takie że $x \rho y$
- ρ nazywa się także wykresem funkcji

Właściwości funkcji

- Fukcja $f : X \to Y$ jest
  - suriekcją (funkcją „na”), jeżeli
    $\forall y \in Y \quad \exists x \in X,$ takie, że $f(x) = y$
  - injekcją (funkcją różnowartościwą), jeżeli
    $\forall x_1, x_2 \in X \quad (x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$
  - bijekcją (funkcją wzajemnie jednoznaczną), jeżeli jest ona suriekcją i injekcją

- Wprowadzenie

Teoria Mnogości

Funkcje
- Wzory
- Definicja
- Relacje
- Właściwości

Funkcja złożona

- Dane są dwie fukcje $f : X \to Y$ oraz $g : Y \to Z$
  - funkcja złożona $g \circ f : X \to Z$
    - $g \circ f(x) = g(f(x))$
- $f \circ g \neq g \circ f$
- $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- $\log(\log(\sin(x)))$ nie może zostac określona jako funkcja złożona

Funkcja tożsamościowa

- Funkcja $I_X : X \to X$ nazywa się tożsamościową (identycznościowa), jeżeli $\forall x \in X \quad I_X(x) = x$
- Dla dowolnej funkcji $f : X \to Y$
  - $f \circ I_X = f$
  - $I_Y \circ f = f$

Funkcja odwrotna

- Dana jest funkcja $f : X \to Y$
- Funkcja $f^{-1} : Y \to X$ nazywa się odwrotną (do f), jeżeli $f \circ f^{-1} = I_Y$ oraz $f^{-1} \circ f = I_X$
- Dla dowolnej funkcji $f : X \to Y$
  - $\exists f^{-1} \iff f$ jest bijekcją