Algebra Liniowa i Geometria. Ściąga

Aleksander Denisiuk
Polsko-Japońska Akademia Technik Komputerowych
Wydział Informatyki w Gdańsku
ul. Targ Drzewny 9/11
80-894 Gdańsk

denisiuk@pja.edu.pl

Wprowadzenie

Podstawowe Informacje

- Moja strona przedmiotu *Algebra:* `https://users.pja.edu.pl/~denisjuk/alg/`
- Książka do ćwiczeń:
  - Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas: Algebra i geometria analityczna. Przykłady i zadania. *Może być każde wydanie.*
- Zaliczenie ćwiczeń odbędzie się na podstawie dwóch kolokwiów.
  - Do zdobycia będzie 100% punktów, na zaliczenie trzeba zebrać 50%.
  - Kolokwia odbędą się na ósmym oraz piętnastym zajęciach.
  - Na kolokwiach nie można korzystać z materiałów pomocniczych (oprócz dostarczonych przez prowdzącego kolokwium). Nawet z tego dokumentu.

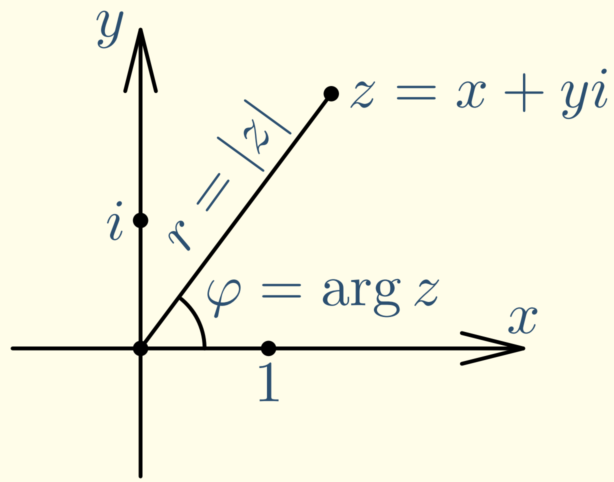
Liczby zespolone

Postać algebraiczna

- $z = x + yi = x + iy$, $z \in \mathbb{C}$
  - $x = \operatorname{Re} z$ — część rzeczywista
  - $y = \operatorname{Im} z$ — część urojona
  - i — jednostka urojona, $i^2 = -1$, $\sqrt{-1} = \pm i$
- $\bar{z} = x - yi$ — liczba sprzężona
- $|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Dzielenie:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Postać trygonometryczna liczb zespolonych



- $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
- $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\varphi = \arg z, \begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{r} \\ \sin\varphi = \frac{y}{r} \end{cases}$
- $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

Postać wykładnicza liczb zespolonych

- $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$
- $z^n = r^n e^{in\varphi}$
- $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$, $k = 0, \ldots, n-1$

Wielomiany

- $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$
  - $\deg P = n$
- Dzielenie z resztą: $P(x) = Q(x) \cdot G(x) + R(x)$
  - $G(x)$ — iloraz
  - $R(x)$ — reszta, $\deg R(x) < \deg Q(x)$
- Schemat Hornera:

a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_1	a_0
$b_n = a_n$	$b_{n-1}=$ $=a_{n-1}+b_nx$	$\ldots$	$b_1=$ $=a_1+b_2x$	$P(x) = a_0 + b_1x$

Pierwiastki

- $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$
  - x^* jest pierwiastkiem $\iff P(x^*) = 0$
- x^* jest pierwiastkiem $\iff P(x) = (x - x^*)Q(x)$, $\deg Q(x) = n - 1$
  - $x_1, \ldots, x_n$ — pierwiastki $\iff P(x) = a_n(x - x_1)\ldots(x - x_n)$
- Wielomian całkowity: $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$
  - x^* jest pierwiastkiem całkowitym $\Rightarrow x^*$ jest dzielnikiem a_0
  - $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem wymiernym $\Rightarrow p$ jest dzielnikiem a_0, q jest dzielnikiem a_n

Ułamki proste

- $\deg P < n$
- $\frac{P(x)}{(x-x_1)\ldots(x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_n}$
- $\frac{P(x)}{\ldots(x-x_k)^m\ldots} = \cdots + \frac{A_{k,1}}{x-x_n} + \cdots + \frac{A_{k,m}}{(x-x_k)^m} + \ldots$
- $\frac{P(x)}{\ldots(x^2+p_kx+q_k)^m\ldots} =$
  $\cdots + \frac{A_{k,1}x+B_{k,1}}{(x^2+p_kx+q_k)} + \cdots + \frac{A_{k,m}x+B_{k,m}}{(x^2+p_kx+q_k)^m} + \ldots$

Macierze i wyznaczniki

- Macierz $m \times n$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
  - a_{ij}: $i = 1, \ldots, m$ — numer wiersza, $j = 1, \ldots, m$ — numer kolumny
- Macierz *transponowana*: $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
- Wektor $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$
  - w wierszu: $a = (a_1, \ldots, a_m)$

Dodawanie i mnożenie przez skalar

- $$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$
- $$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Mnożenie macierzy

- $$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix}$$
- $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$
  - $i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, k$
- $$\begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{nj} & \vdots \end{pmatrix}$$

- $\det(a_{11}) = a_{11}$
- $$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$
- $$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

- $$\begin{vmatrix} \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \end{vmatrix} = \pm a_{i1}M_{i1} \pm a_{i2}M_{i2} \pm \cdots \pm a_{in}M_{in}$$
  - Minor $M_{i,j}$: skreślić wiersz i oraz kolumnę j: $M_{i,j} =$
    $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
  - Znaki na przemian: $\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \multicolumn{4}{l}{\dotfill} \end{vmatrix}$
    - $(-1)^{i+j}$
- Wzdłuż kolumny: tak samo

- $W_i \leftrightarrow W_j$: $\begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$
- $\lambda W_i \to W_i$: $\begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$
- $W_j \to W_j + \lambda W_i$:
$$\begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j1} + \lambda a_{i1} & \cdots & a_{jn} + \lambda a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$
- Kolumnami: tak samo

- $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$
- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
- Poprzez minory:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{21} & M_{31} & \dots & \pm M_{n1} \\ -M_{12} & M_{22} & -M_{32} & \dots & \pm M_{n2} \\ M_{13} & -M_{23} & M_{33} & \dots & \pm M_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pm M_{1n} & \pm M_{2n} & \pm M_{3n} & \dots & \pm M_{nn} \end{pmatrix}$$

  - Minory są kolumnami (macierz *transponowana*)
  - Znaki — na przemian: $(-1)^{i+j}$

- $(A \mid I) \rightsquigarrow (I \mid A^{-1})$ przekształcenia elementarne na długich wierszach
- Równania macierzowe:
  - $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$
  - $XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$

Układy równań liniowych

Wzory Cramera

- $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$
  - $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$
  - $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$
- $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$
  - $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$
  - $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

    Δ_2, Δ_3 — zgadnij

- $$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$
- Macierz rozszerzona $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$
- Operacje elementarne na długich wierszach, do postaci schodkowej:
$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} \alpha_{11} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & \dots & \alpha_{2k_2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \alpha_{3k_3} & \dots & \dots & \dots & \alpha_{3n} & \beta_3 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \alpha_{4k_4} & \dots & \alpha_{4n} & \beta_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

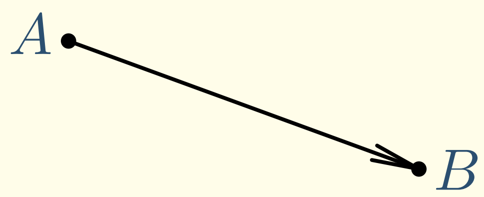
Bieg odwrotny

- Odrzuć wiersze zerowe
- Jeżeli ostatni wiersz ma postać $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & | & b \end{pmatrix}$, gdzie $b \neq 0$, to układ jest sprzeczny
- Rozwiąż schodkowy układ od dołu
  - na każdym kroku wybierz jedną zmienną główną, reszta — to są zmienne swobodne, parametry
- Rozwiązanie zapisz jako wektor (kombinację liniową wektorów)

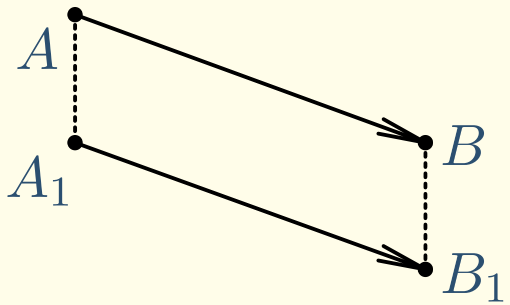
Geometria Analityczna

Wektory

- Wektor $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB} = B - A$

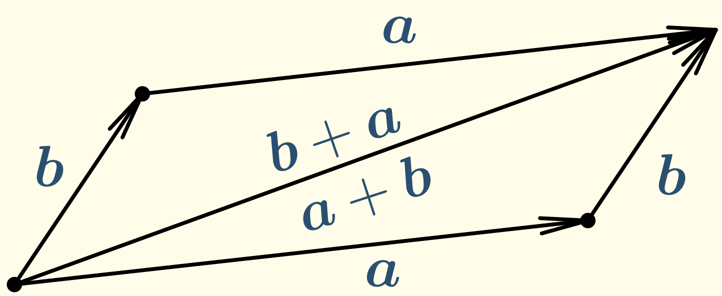


- Równość wektorów: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} = \boldsymbol{a}$

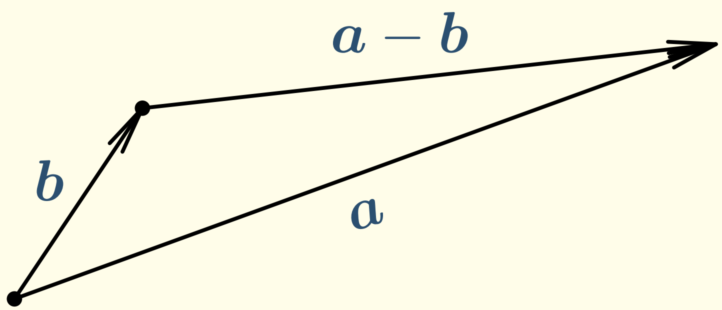


- Wektor zerowy $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA}$

Dodawanie, odejmowanie, skalowanie

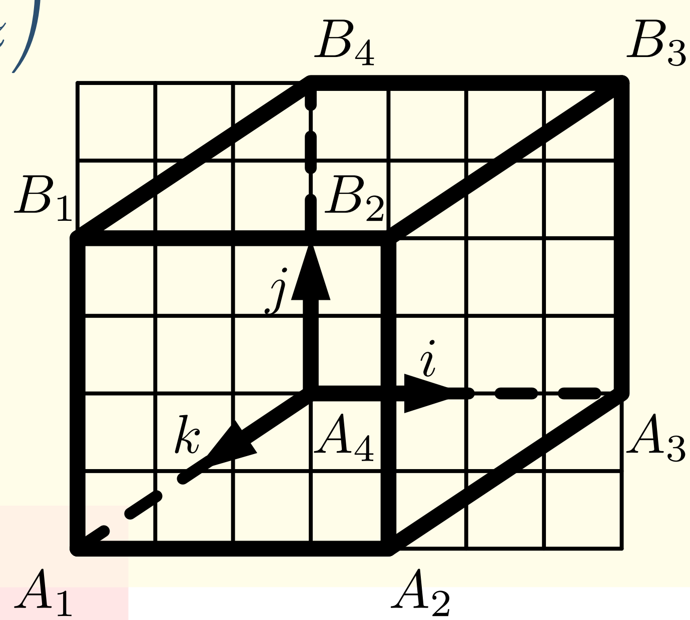
- 

- $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a} \iff \boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$



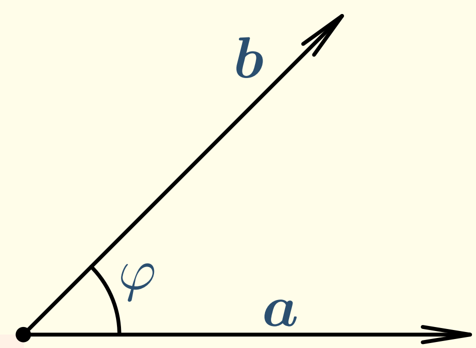
- $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$

- Baza kartezjańska: $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$
  - $|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = 1$
  - $\boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{j} \perp \boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{i}$
  - $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) > 0$
- Współrzędne: $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
  - $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, z)$



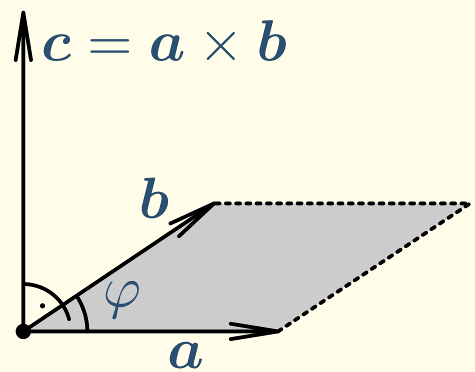
Iloczyn skalarny

- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{ab} = \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\varphi = \boldsymbol{ba}$
  - $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$
  - $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = 1$
  - $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{kj} = \boldsymbol{ik} = 0$
  - $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2}$
  - $\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$
    - $\varphi = \arccos \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$
- $(x_a, y_a, z_a) \cdot (x_b, y_b, z_b) = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$



Iloczyn wektorowy

- $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$
  - $\boldsymbol{c} \perp (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$
  - $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\varphi$
  - $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) > 0$
- Pole równoległoboku

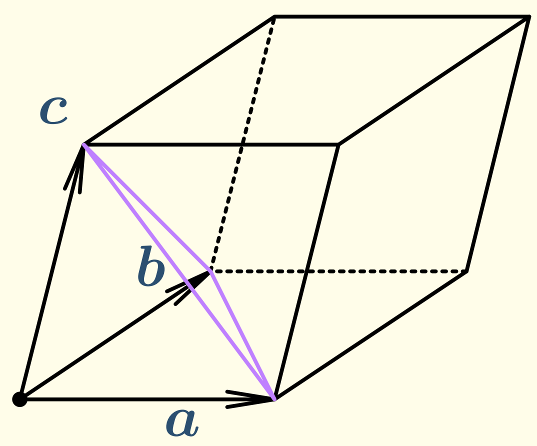


Iloczyn wektorowy

- $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$
- $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \mathbf{0}$
- $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$
- $\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}$
- $(x_a, y_a, z_a) \times (x_b, y_b, z_b) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$

Iloczyn mieszany

- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$
- Zorientowana objętość równoległościanu (6 objętości czworościanu)
- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0 \iff$ wektory są współpłaszczyznowe (komplanarne)

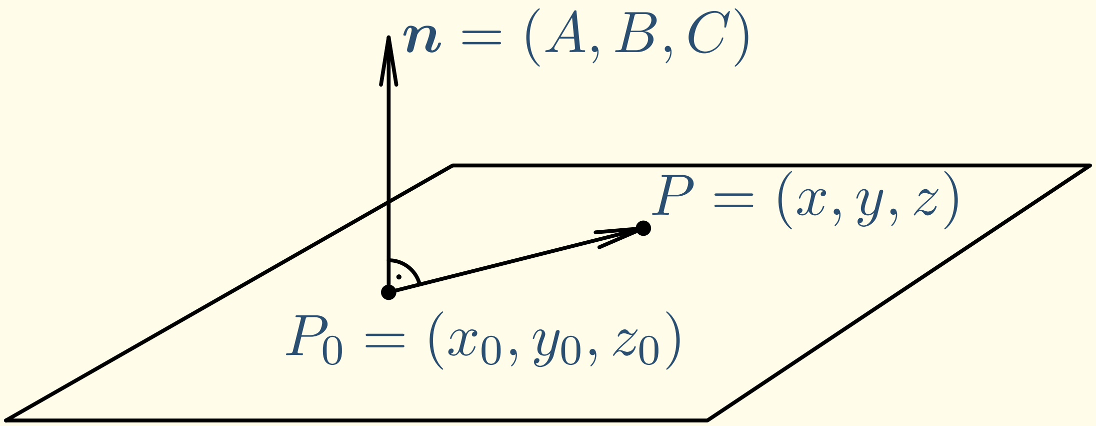


Równania płaszczyzny

- Ogólne: $Ax + By + Cz + D = 0$
- Parametryczne: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$
  - $\begin{cases} x = x_0 + a_1 s + a_2 t \\ y = y_0 + b_1 s + b_2 t \\ z = z_0 + c_1 s + c_2 t \end{cases}$
    - $s, t \in \mathbb{R}$
- Ogólne $\rightsquigarrow$ parametryczne
  - Dwie współrzędne wybrać jako parametry
- Parametryczne $\rightsquigarrow$ ogólne
  - Wyeliminować s i t

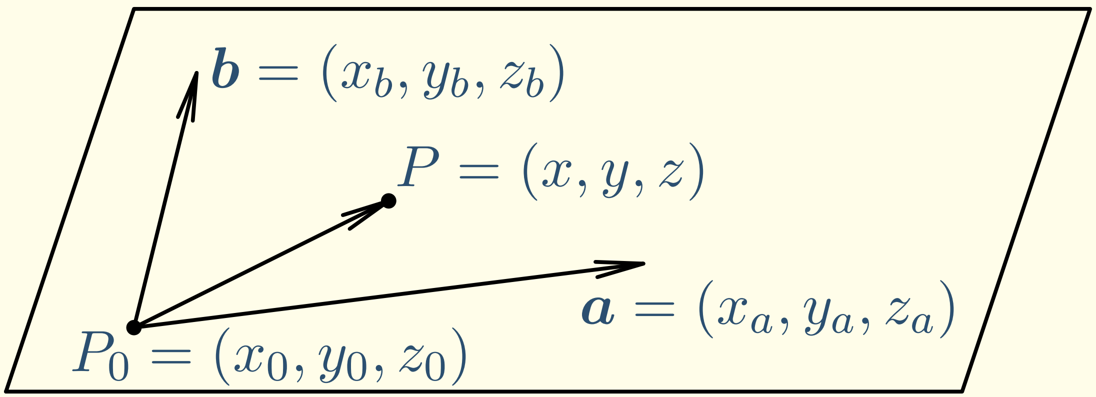
Wektor normalny i punkt

- $\boldsymbol{n} \cdot (P - P_0) = 0$
  - $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$



Dwa wektory i punkt

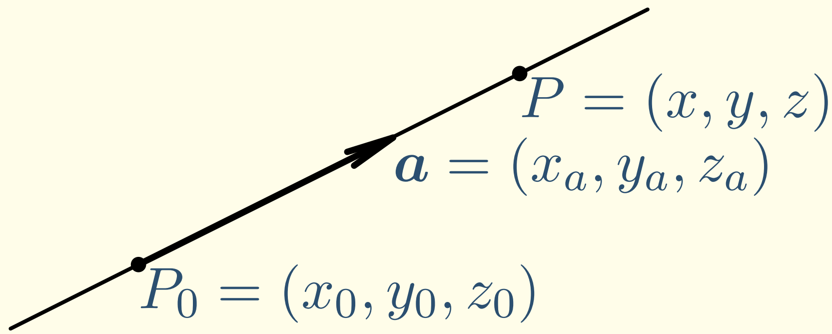
- $(\overrightarrow{P_0P}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$
- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$



- Parametryczne: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
  - $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$
  - $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$
    - $t \in \mathbb{R}$
- Krawędziowe: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$
- Parametryczne $\rightsquigarrow$ krawędziowe
  - Wyeliminować t

Punkt i wektor

- $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$$

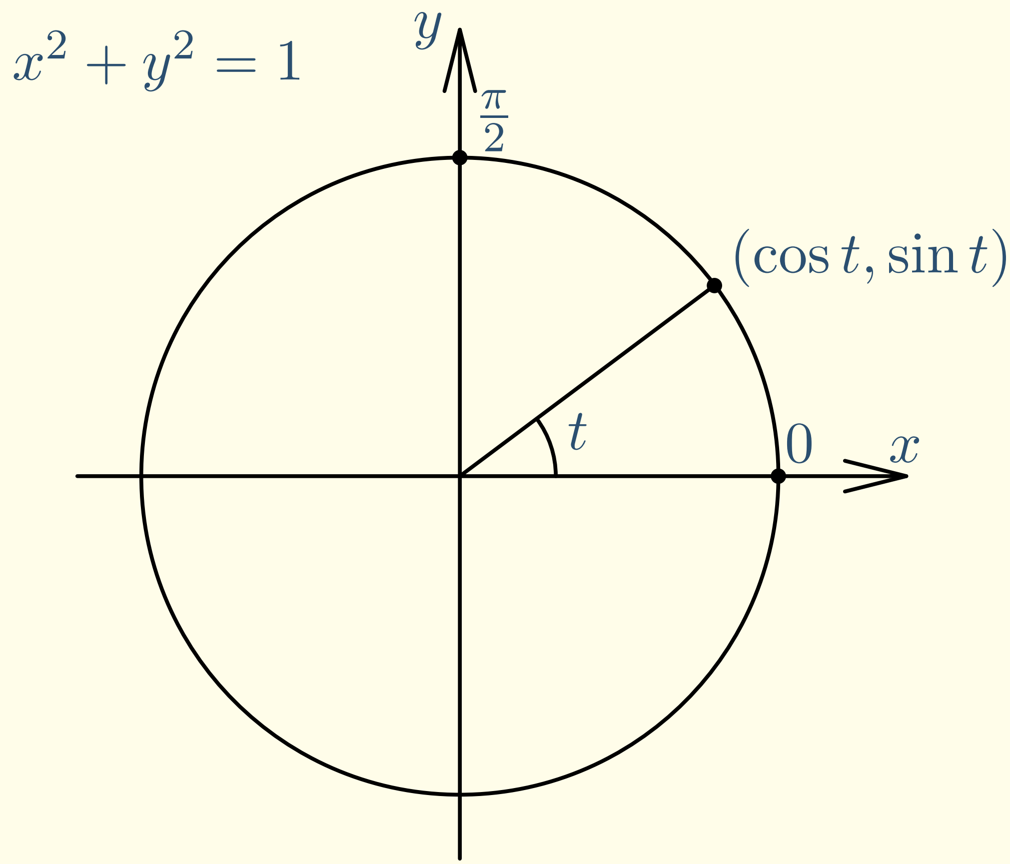


Appendix

Wzory skróconego mnożenia

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Funkcje trygonometryczne



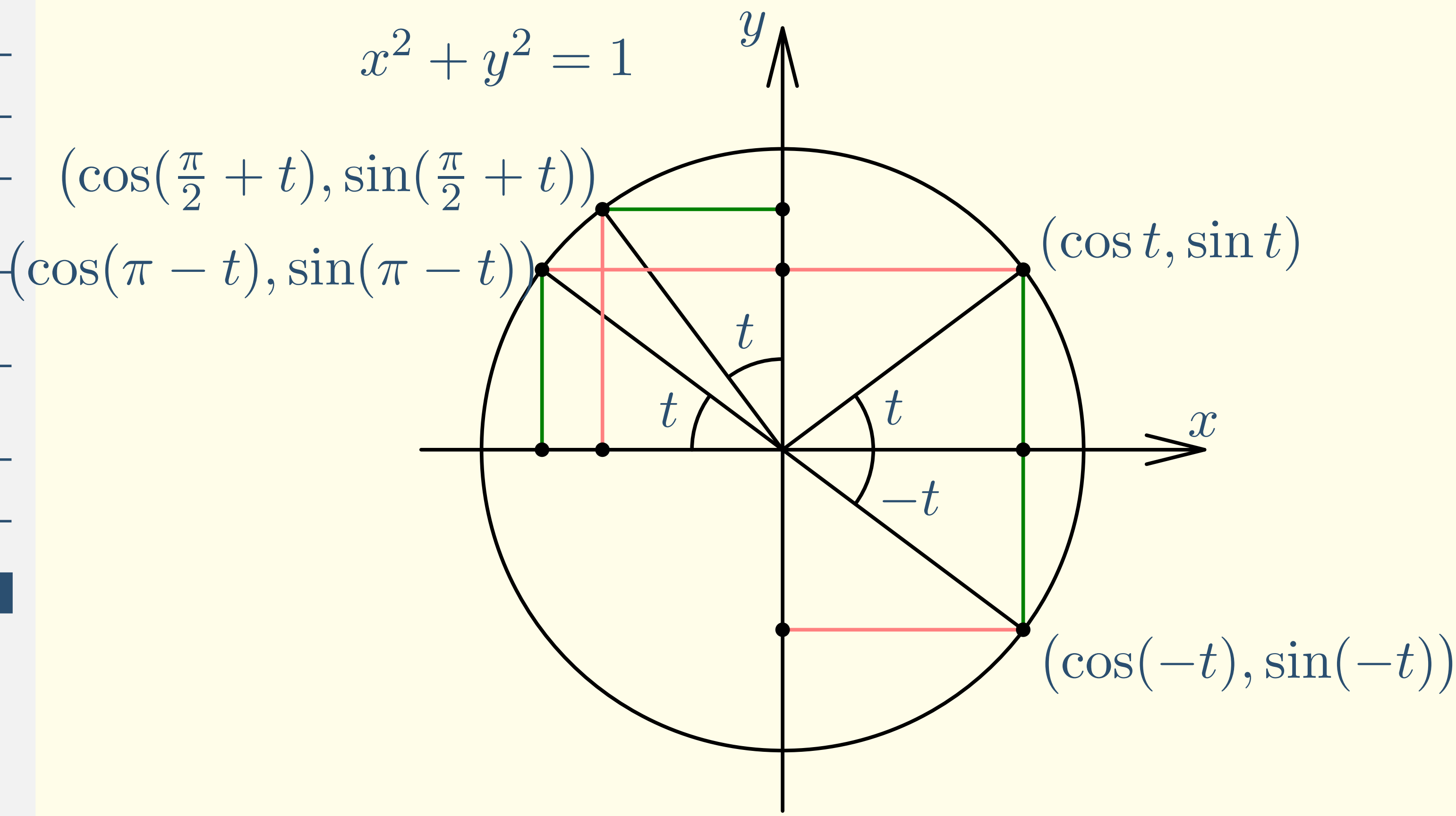
- $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$
- $\cos 0 = 1,\ \sin 0 = 0$
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0,\ \sin \frac{\pi}{2} = 1$

- W przedziale $[0, \frac{\pi}{2}]$ funkcja $\sin t$ rośnie, funkcja $\cos t$ maleje

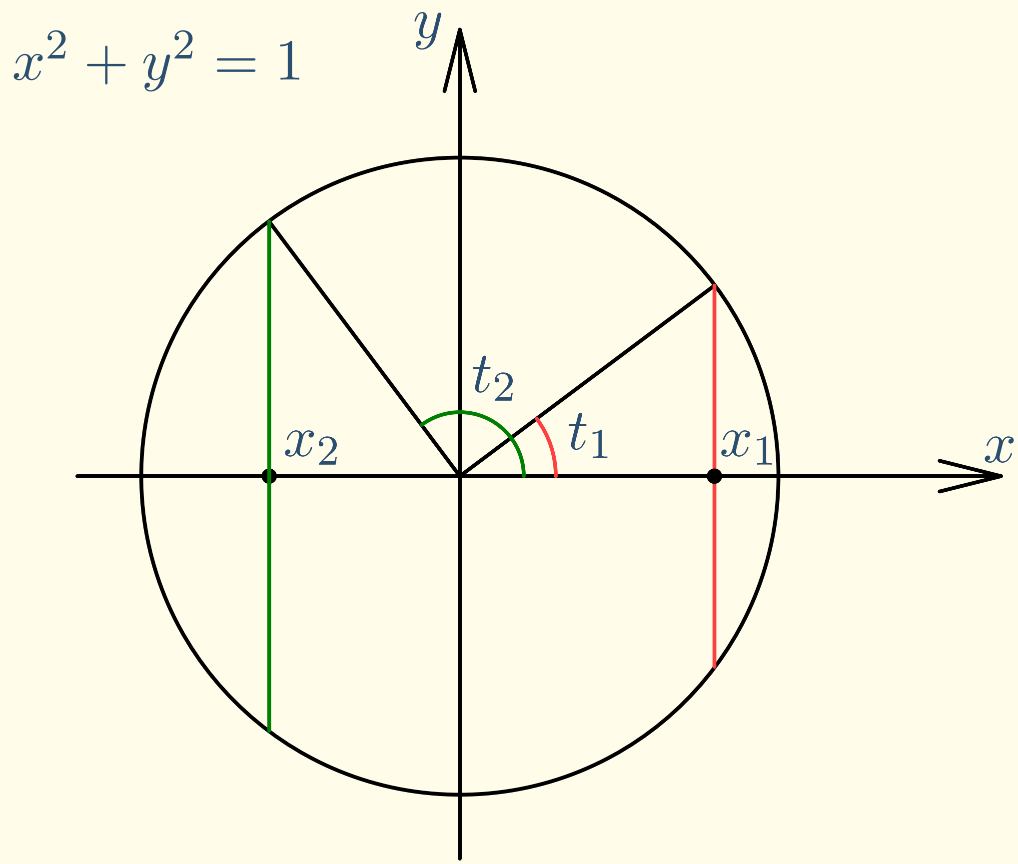
Wartości szczególne

t	$\cos t$	$\sin t$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1

Wzory redukcyjne



- $\cos(-t) = \cos(t)$,
  $\sin(-t) = -\sin(t)$
- $\cos(\frac{\pi}{2} + t) = -\sin(t)$,
  $\sin(\frac{\pi}{2} + t) = \cos(t)$
- $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$,
  $\sin(\pi - t) = \cos(t)$
- Etc



$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

- $t_1 = \arccos x_1$
- $t_2 = \arccos x_2$
- $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$
- $\arccos 1 = 0$
- $\arccos(-1) = \pi$
- $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$
- $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$

Równanie kwadratowe

- $ax^2 + bx + c = 0$
- $\Delta = b^2 - 4ac$
- $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$