

# Animacja Komputerowa. Wstępne Wiadomości Matematyczne

Aleksander Denisiuk  
Polsko-Japońska Akademia Technik Komputerowych  
Wydział Informatyki w Gdańsku  
ul. Brzegi 55  
80-045 Gdańsk

denisjuk@pja.edu.pl

# Wstępne Wiadomości Matematyczne

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem  
<http://users.pja.edu.pl/~denisjuk/>

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

- Układ obiektu
- Układ świata
- Układ kamery

- środek zainteresowania ( $COI$ ), położenie kamery ( $EYE$ )

$$w = COI - EYE,$$

$$u = w \times [0, 1, 0],$$

$$v = u \times w.$$

- kierunek do góry ( $UP$ )

$$w = COI - EYE,$$

$$u = w \times UP,$$

$$v = u \times w.$$

# Układ współrzędnych afinicznych

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

- Wybierzmy dowolny punkt  $O$ , początek układu
- Przez ten punkt poprowadźmy trzy niekomplanarne proste:  $Ox, Oy, Oz$ , osie współrzędnych
- Płaszczyzny współrzędnych  $Oxy, Oxz, Oyz$
- Na osiach wyznaczmy niezerowe wektory: odpowiednio  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  —bazę.
- Dla każdego punktu  $A$  wektor  $\overrightarrow{OA}$  ma jednoznaczne przedstawienie  $\overrightarrow{OX} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ 
  - liczby  $x, y, z$  — współrzędne punktu  $A$
- układ jest prawym (dodatnim), jeżeli  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  jest zorientowany dodatnio
- układ jest lewym (ujemnym), jeżeli  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  jest zorientowany ujemnie
- kierunki na osiach, zorientowane zgodnie z wektorami bazy, nazywają się dodatnimi. Kierunki przeciwne — ujemnymi

# Układ współrzędnych kartezjańskich

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

- Układ współrzędnych nazywa się kartezjańskim, jeżeli
  - osie są wzajemnie prostopadłe
  - wektory  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  są jednostkowe (mają jednostkową długość).
- Dalej w prezentacji prawie zawsze układ będzie prawym kartezjańskim układem
- Dla wektorów bazy układu kartezjańskiego czasami stosuje się oznaczenia  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$

- Niech dane będą dwa ogólne układy współrzędnych:  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  oraz  $(O', \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$
- Punkt  $P$  ma współrzędne  $(x, y, z)$  względem jednego układu oraz  $(z', y', z')$  względem drugiego.

- Wektory  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  mają jednoznaczne rozłożenie po

$$\text{bazie } (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3): \begin{cases} \mathbf{e}_1 = a_{11}\mathbf{f}_1 + a_{21}\mathbf{f}_2 + a_{31}\mathbf{f}_3, \\ \mathbf{e}_2 = a_{12}\mathbf{f}_1 + a_{22}\mathbf{f}_2 + a_{32}\mathbf{f}_3, \\ \mathbf{e}_3 = a_{13}\mathbf{f}_1 + a_{23}\mathbf{f}_2 + a_{33}\mathbf{f}_3. \end{cases}$$

$$\square \quad (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3) = (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \mathbf{f}_3) A$$

- Punkt  $O$  w nowym układzie ma współrzędne  $(x_0, y_0, z_0)$ .

- Wówczas 
$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + x_0, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + y_0, \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + z_0. \end{cases}$$

- $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

- Niech dany będzie układ współrzędnych  $O, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$  oraz punkt  $O'$  i układ wektorów  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

- przekształceniem afinicznym nawiązuje się odwzorowanie

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto O' + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$$

- współrzędne punktu  $A$  po przekształceniu będą równe

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \text{ gdzie}$$

- $(\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3) = (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \mathbf{f}_3) A$

- $(x_0, y_0, z_0)$  — współrzędne wektora  $\overrightarrow{OO'}$

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

- Czwórka liczb  $x, y, z, w \in \mathbb{R}$  ( $w \neq 0$ ) reprezentuje punkt o współrzędnych  $(x/w, y/w, z/w) \in \mathbb{R}^3$ .
- $(2, 1, 1) \sim (2 : 1 : 1 : 1) \sim (6 : 3 : 3 : 3) \sim (-2 : -1 : -1 : -1)$



# Macierz przekształcenia afinicznego w $\mathbb{R}^3$

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + u_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + u_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + u_3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

- Przesunięcie o wektor  $u = (u_1, u_2, u_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trzy układy  
współrzędnychGeometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$ Krzywe  
B-sklejane

Splajny

- Obrót dookoła osi wychodzącej z początku układu współrzędnych w kierunku  $u = (u_1, u_2, u_3)$  o kąt  $\theta$  stopni. Kierunek obrotu określany jest orientacją.

$$\begin{pmatrix} (1-c)u_1^2 + c & (1-c)u_1u_2 - su_3 & (1-c)u_1u_3 + su_2 & 0 \\ (1-c)u_1u_2 + su_3 & (1-c)u_2^2 + c & (1-c)u_2u_3 - su_1 & 0 \\ (1-c)u_1u_3 - su_2 & (1-c)u_2u_3 + su_1 & (1-c)u_3^2 + c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

gdzie  $c = \cos \theta$ ,  $s = \sin \theta$ .

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

$$\begin{matrix} \blacksquare & \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \blacksquare & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

— symetria względem płaszczyzny  $y - z$ .

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

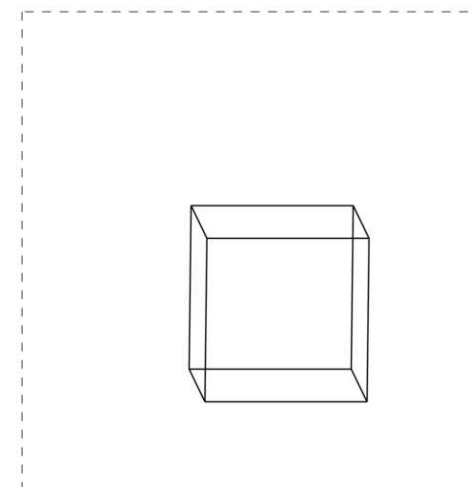
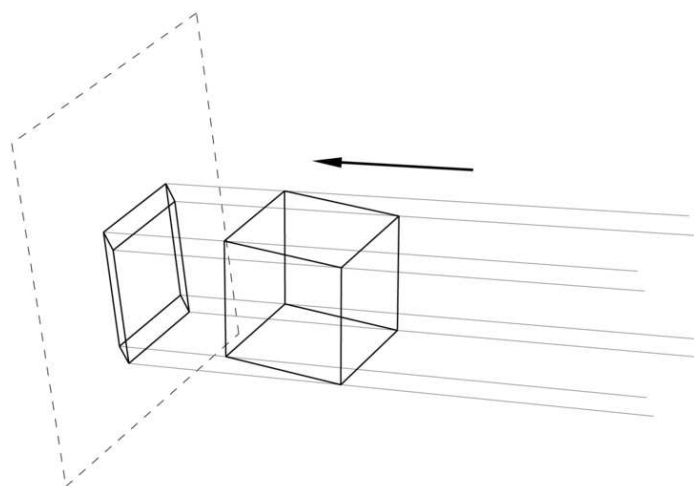
**Rzutowanie**

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny



# Macierz rzutowania równoległego

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

$$l \leq x \leq r, \quad \text{left, right}$$

$$b \leq y \leq t, \quad \text{bottom, top}$$

$$n \leq -z \leq f, \quad \text{near, far}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

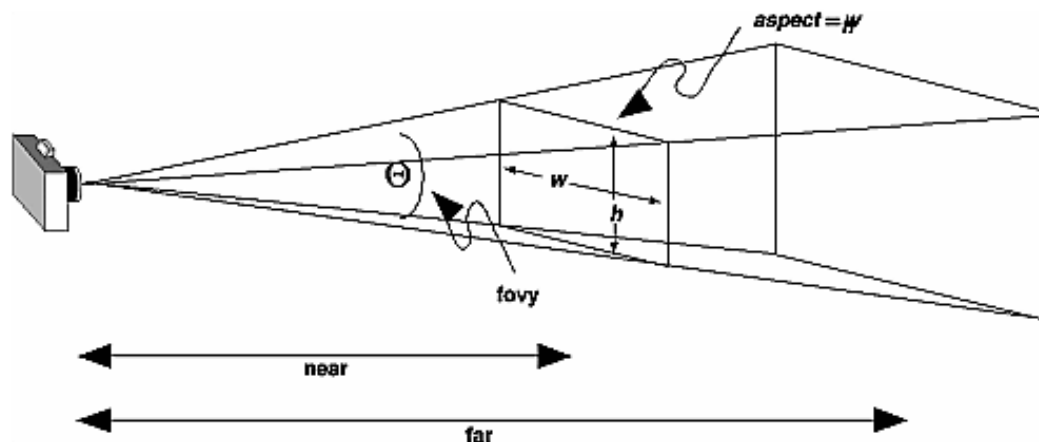
Rzutowanie

Położenia katowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny



- $\theta$  — kąt widzenia
- $a = \frac{w}{h}$  — aspect ratio, format obrazu
- macierz:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} \operatorname{ctg}(\theta/2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ctg}(\theta/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

$$\blacksquare \quad R_{x,\theta_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x & 0 \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\blacksquare \quad R_{y,\theta_y} = \begin{pmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\blacksquare \quad R_{z,\theta_z} = \begin{pmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

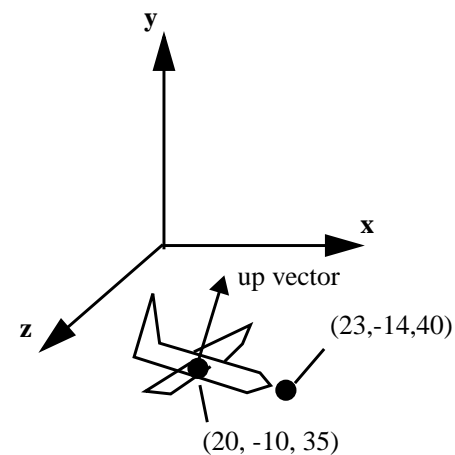
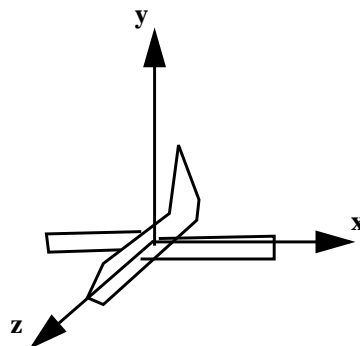
Rzutowanie

Położenia kątowne

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny



- $R = R_y R_x$
- Macierz kosinusów kierunkowych
- Odtworzenie ciągu przekształceń na podstawie macierzy nie jest jednoznaczne

# Modelowanie orientacji. Macierz obrotu

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

$$\blacksquare \quad \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

# Kąty Eulera: odchylenie, pochylenie, przechylenie

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

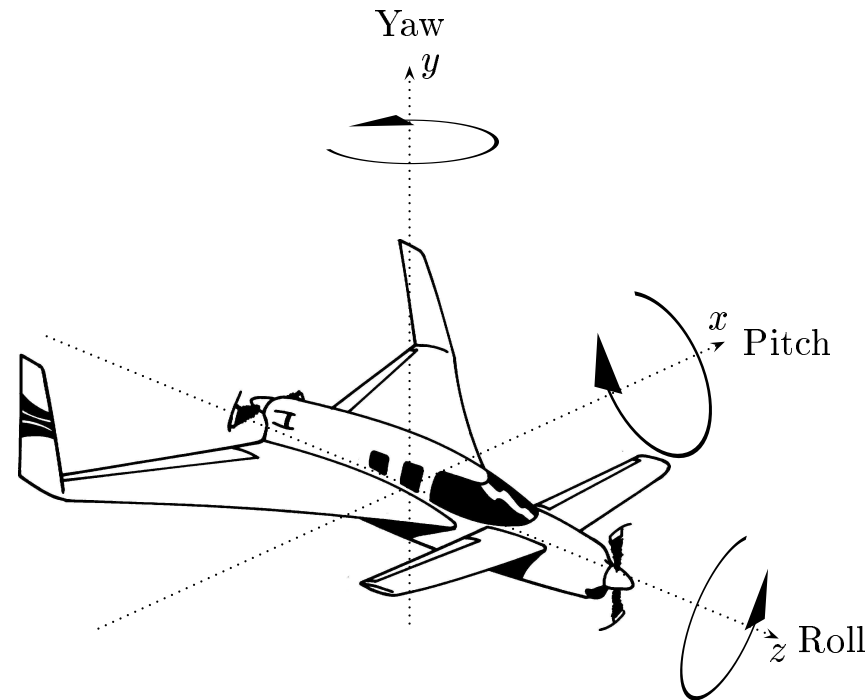
Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny



- $R = R_{\theta_y, j} \circ R_{\theta_p, i} \circ R_{\theta_r, k}$

- $$M_R = \begin{pmatrix} s_y s_p s_r + c_y c_r & s_y s_p c_r - c_y s_r & s_y c_p \\ c_p s_r & c_p c_r & -s_p \\ c_y s_p s_r - s_y c_r & c_y s_p c_r + s_y c_r & c_y c_p \end{pmatrix}$$

- $c_p = \cos \theta_p$ , etc.

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

- Interpolacja kątów, okres  $360^\circ$ .
  - interpolacja od  $170^\circ$  do  $-170^\circ$  a interpolacja od  $170^\circ$  do  $190^\circ$
- niejednoznaczna reprezentacja obrotu:
  - $\theta'_y = \theta_y \pm 180^\circ$
  - $\theta'_p = -\theta_p \pm 180^\circ$
  - $\theta'_r = \theta_r \pm 180^\circ$
- Blokada przegubu
  - interpolacja od  $(0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$  do  $(90^\circ, -90^\circ, -90^\circ)$
  - pozycja pośrednia  $(45^\circ, -45^\circ, -45^\circ)$
  - [Zobacz](#)

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

- $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$
- $$\begin{cases} i^2 = -1, & ij = k, & ik = -j, \\ ji = -k, & j^2 = -1, & jk = i, \\ ki = j, & kj = -i, & k^2 = -1. \end{cases}$$
- $\|q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2},$
- $q^* = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k,$
- $q^{-1} = \frac{1}{\|q\|^2} q^*,$

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

$$q_\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i - \frac{\sqrt{3}}{3}j, \quad q_\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}k, \quad q_\gamma = 2$$

- $q_\alpha \pm q_\beta, q_\alpha \pm q_\gamma,$
- $q_\alpha q_\beta, q_\beta q_\alpha, q_\alpha q_\gamma, q_\gamma q_\alpha,$
- $q_\alpha^*, q_\beta^*, q_\gamma^*,$
- $\|q_\alpha\|, \|q_\beta\|, q_\gamma\|,$
- $q_\alpha^{-1}, q_\beta^{-1}, q_\gamma^{-1}.$

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

- $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{Q},$
  - $\mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{Q} : (v_1, v_2, v_3) \mapsto v_1 i + v_2 j + v_3 k.$
  - $q = s + v_1 i + v_2 j + v_3 k = [s|v].$
- $[s|v][s'|v'] = [ss' - v \cdot v', sv' + s'v + v \times v'].$

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

Twierdzenie 1. Niech  $R_{\theta,u}$  będzie obrotem dookoła osi  $u$   
( $\|u\| = 1$ ),

$$q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)u_1i + \sin(\theta/2)u_2j + \sin(\theta/2)u_3k.$$

Wtedy  $\forall v \in \mathbb{R}^3$

$$Rv = qvq^{-1}$$



Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

- Obrót o kąt  $\theta$  dookoła osi  $(u_1, u_2, u_3)$ .
- $q = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)u_1, \sin(\theta/2)u_2, \sin(\theta/2)u_3)$
- $q = (q_0, q_1, q_2, q_3), \quad \|q\|^2 = \sum q_i^2 = 1:$ 
  - $\theta = 2 \arccos q_0,$
  - $u = \frac{1}{\sqrt{1-q_0^2}}(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{\sin \theta/2}(q_1, q_2, q_3),$
  - $q = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)u_1, \sin(\theta/2)u_2, \sin(\theta/2)u_3)$
- $R_\theta = R_{\theta+360^\circ} \Rightarrow -q \sim q$

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

■  $q \rightarrow M_R$ :

□  $i \mapsto qiq^{-1}, j \mapsto qjq^{-1}, k \mapsto qkq^{-1},$

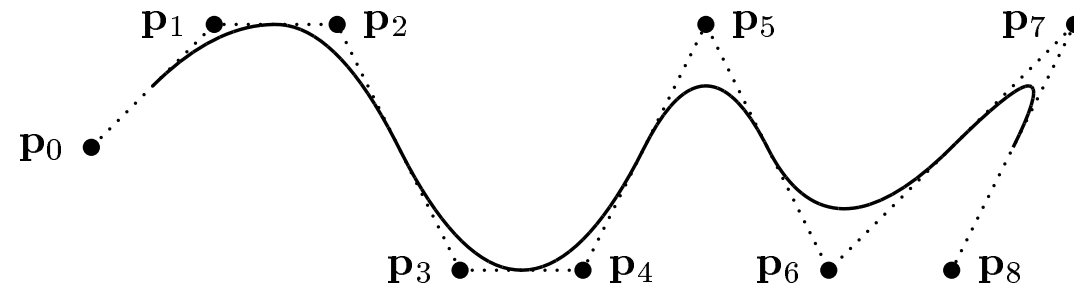
□ 
$$M_R = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_1q_2 - 2q_3q_0 & 2q_1q_3 + 2q_2q_0 \\ 2q_1q_2 + 2q_3q_0 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2q_2q_3 - 2q_1q_0 \\ 2q_1q_3 - 2q_2q_0 & 2q_2q_3 + 2q_1q_0 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}.$$

■  $M_R \rightarrow q$ :

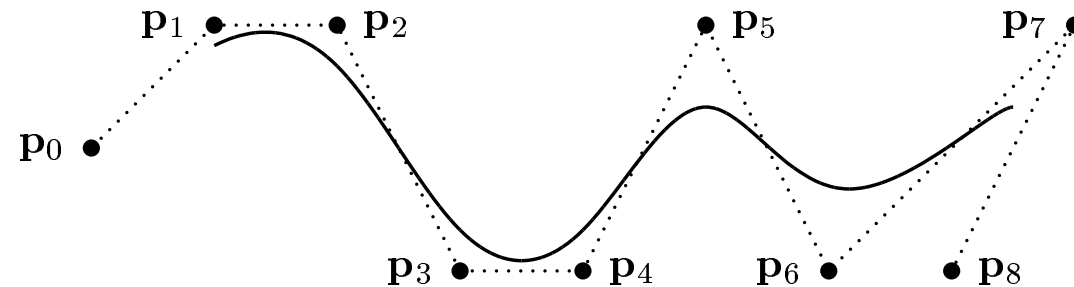
□ 
$$\begin{cases} m_{2,1} + m_{1,2} = 4q_1q_2, & m_{1,3} + m_{3,1} = 4q_1q_3, & m_{3,2} + m_{2,3} = 4q_2q_3, \\ m_{2,1} - m_{1,2} = 4q_3q_0, & m_{1,3} - m_{3,1} = 4q_2q_0, & m_{3,2} - m_{2,3} = 4q_1q_0, \end{cases}$$

□ 
$$\begin{cases} 2m_{0,0} - \text{Tr } M = 4q_0^2 - 1, & 2m_{1,1} - \text{Tr } M = 4q_1^2 - 1, \\ 2m_{2,2} - \text{Tr } M = 4q_2^2 - 1, & 2m_{3,3} - \text{Tr } M = 4q_3^2 - 1. \end{cases}$$

# Krzywe B-sklejane (B-spline)



(a) Degree two B-spline curve.



(b) Degree three B-spline curve.

Figure VIII.1: Degree two and degree three B-spline curves with uniformly spaced knots and nine control points. The degree three curve is smoother than the degree two curve, whereas, the degree two curve approaches the control points a little more closely. Compare with the degree eight Bézier curve of figure VII.9(c) on page 167.

# Krzywa B-sklejana trzeciego stopnia

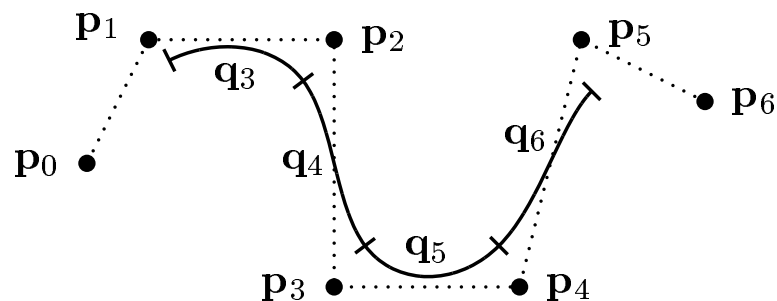


Figure VIII.2: A degree three uniform B-spline curve with seven control points.

$$q(u) = \sum_{i=0}^n N_i(u)p_i, \quad 3 \leq u \leq n+1$$
$$N_i(u) = 0 \text{ dla } u \leq i \text{ lub } u \geq i+4$$

Trzy układy  
współrzędnych  
Geometria  
afiniczna  
Rzutowanie  
Położenia kątowe  
Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$   
Krzywe  
B-sklejane  
Splajny

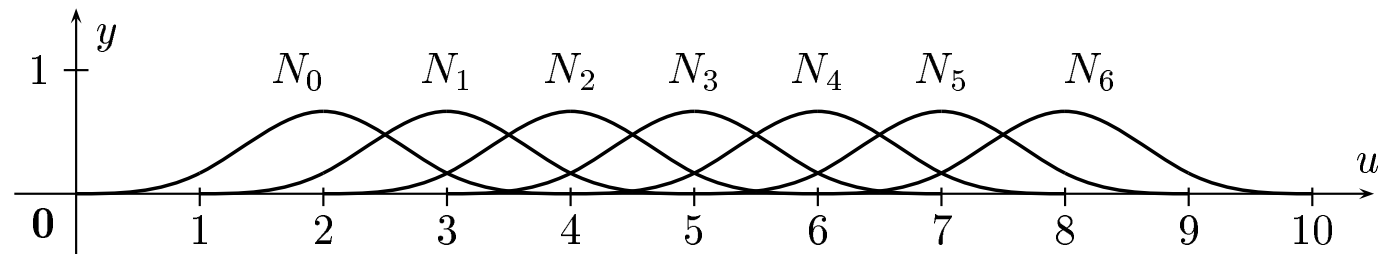


Figure VIII.3: The blending functions for a uniform, degree three B-spline. Each function  $N_i$  has support  $(i, i + 4)$ .

- $N_i(u) = N_0(u - i)$
- Obcięte wielomiany stopnia 3
- $N_i \in C^2$
- $\sum_i N_i(u) = 1$  dla  $u \in [3, n + 1]$
- $N_i(u) \geq 0$
- $N_i(u) = 0$  dla  $u \leq i$  lub  $u \geq i + 4$

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

$$R_0(u) = N_0(u), \quad R_1(u) = N_0(u+1), \quad R_2(u) = N_0(u+2), \\ R_3(u) = N_0(u+3) \quad u \in [0, 1]$$

$\Downarrow$

$$R_0(u) = \frac{1}{6}u^3 \quad R_1(u) = \frac{1}{6}(-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1) \\ R_2(u) = \frac{1}{6}(3u^3 - 6u^2 + 4) \quad R_3(u) = \frac{1}{6}(1-u)^3$$

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

$$\begin{aligned} R_0(0) &= 0, & R'_0(0) &= 0, \\ R_0(1) &= \frac{1}{6} = R_1(0), & R'_0(1) &= \frac{1}{2} = R'_1(0), \\ R_1(1) &= \frac{2}{3} = R_2(0), & R'_1(1) &= 0 = R'_2(0), \\ R_2(1) &= \frac{1}{6} = R_3(0), & R'_2(1) &= -\frac{1}{2} = R'_3(0), \\ R_3(1) &= 0, & R'_3(1) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R''_0(0) &= 0, \\ R''_0(1) &= 1 = R''_1(0), \\ R''_1(1) &= -2 = R''_2(0), \\ R''_2(1) &= 1 = R''_3(0), \\ R''_3(1) &= 0. \end{aligned}$$

# Krzywa B-sklejana niejednorodna

Trzy układy  
współrzędnych  
Geometria  
afiniczna  
Rzutowanie  
Położenia kątowe  
Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$   
Krzywe  
B-sklejane  
Splajny

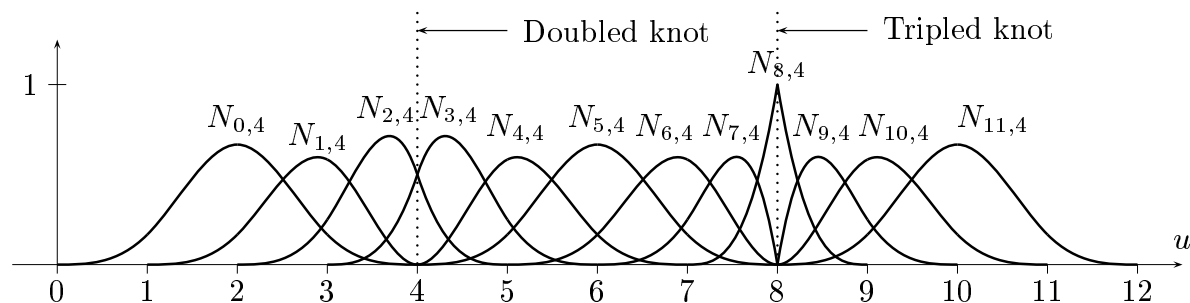


Figure VIII.4: Example of order four (degree three) blending functions with repeated knots. The knot vector is  $[0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 11, 12]$  so that the knot 4 has multiplicity two and the knot 8 has multiplicity three.

- węzły  $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_{l-1} \leq u_l$
- węzły wielokrotne  $u_{i-1} \leq u_i = u_{i+1} \leq u_{i+2}$

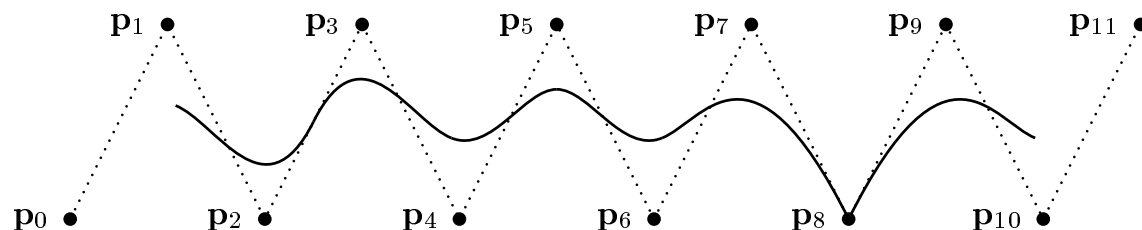


Figure VIII.5: Example of an order four B-spline created with repeated knots. This curve is created with the knot vector and blending functions shown in



# Krzywa B-sklejana stopnia $m - 1$ (Cox de Boor)

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

- Dane są węzły  $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_{l-1} \leq u_l$ .
- Dla  $i = 0, 1, \dots, l - 1$  wagi  $N_{i,1} = \begin{cases} 1 & u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \end{cases}$
- $N_{i,k+1}(u) = \frac{u-u_i}{u_{i+k}-u_i} N_{i,k}(u) + \frac{u_{i+k+1}-u}{u_{i+k+1}-u_{i+1}} N_{i+1,k}(u)$
- $0/0 = 0, (a/0) \cdot 0 = 0$
- $N_{i,m}$  jest obciętym (w węzłach) wielomianem stopnia  $m - 1$
- $\text{supp } N_{i,m} = [u_i, u_{i+m}]$  jest obciętym (w węzłach) wielomianem stopnia  $m - 1$
- $N_{i,m}$  zależy tylko od  $u_i, \dots, u_{i+m}$

# Przykład. Węzły jednorodne, $m = 2$

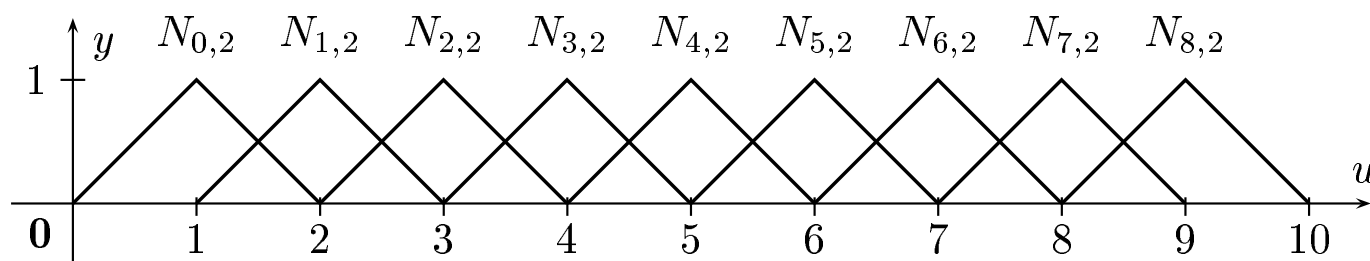


Figure VIII.6: The order two (piecewise degree one) blending functions with uniformly spaced knots,  $u_i = i$ . Here  $\ell = 10$ , and there are  $\ell + 1$  knots and  $\ell - 1$  blending functions. The associated B-spline curve of equation (VIII.2) is defined for  $1 \leq u \leq \ell - 1$ .

$$N_{0,2} = \begin{cases} u & 0 \leq u \leq 1, \\ 2 - u & 1 \leq u \leq 2, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

# Przykład. Węzły jednorodne, $m = 3$

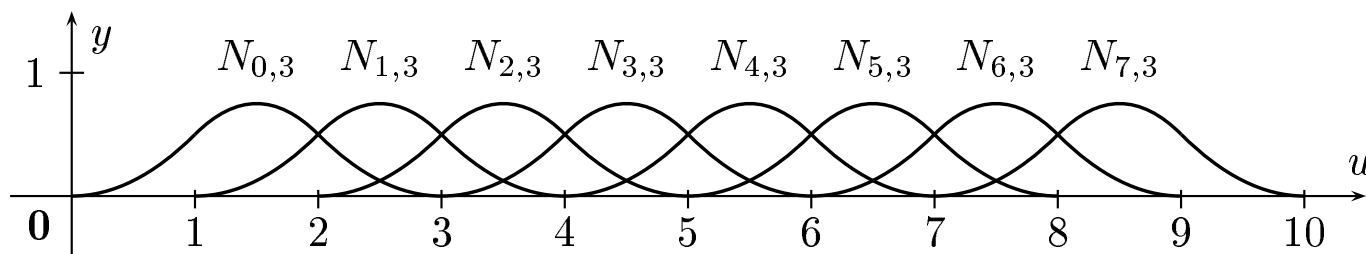


Figure VIII.7: The order three (piecewise degree two) blending functions with uniform knot positions  $u_i = i$ . We still have  $\ell = 10$ ; there are  $\ell + 1$  knots and  $\ell - 2$  blending functions. The associated B-spline curve of equation (VIII.3) is defined for  $2 \leq u \leq \ell - 2$ .

$$\blacksquare \quad N_{0,3} = \begin{cases} \frac{1}{2}u^2 & 0 \leq u < 1, \\ \frac{1}{2}u(2-u) + \frac{1}{2}(3-u(u-1)) & 1 \leq u < 2, \\ \frac{1}{2}(3-u)^2 & 2 \leq u < 3, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

# Przykład. Węzły jednorodne, $m = 4$

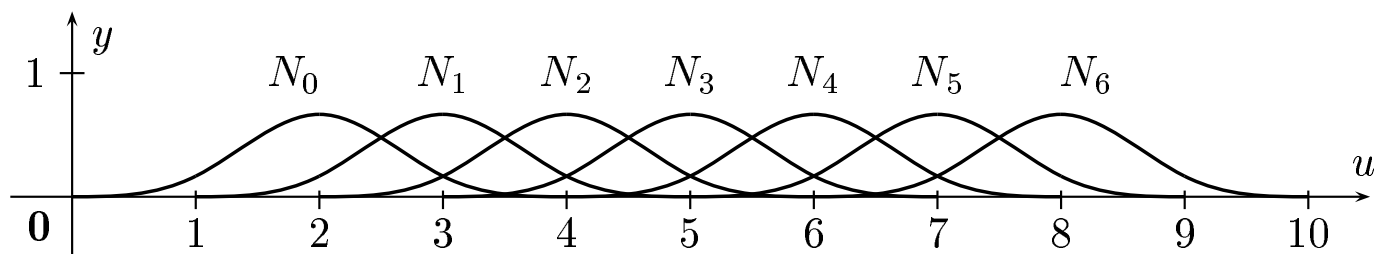


Figure VIII.3: The blending functions for a uniform, degree three B-spline. Each function  $N_i$  has support  $(i, i + 4)$ .

Trzy układy  
współrzędnych  
Geometria  
afiniczna  
Rzutowanie  
Położenia kątowe  
Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$   
Krzywe  
B-sklejane  
Splajny

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

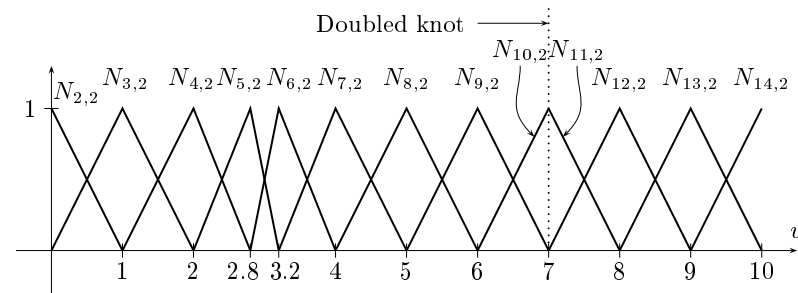
Krzywe  
B-sklejane

Splajny

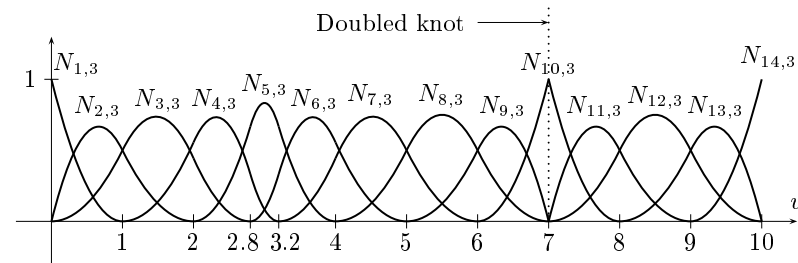
- węzły:  $0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1$
- $N_{3,1}(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \end{cases}$
- $N_{i,1} = 0$  dla  $i \neq 3$
- $N_{2,2}(u) = 1 - u, N_{3,2}(u) = u$
- $N_{1,3}(u) = (1 - u)^2, N_{2,3}(u) = 2u(1 - u), N_{3,3}(u) = u^2$
- $N_{0,4}(u) = (1 - u)^3, N_{1,4}(u) = 3u(1 - u)^2,$   
 $N_{2,4}(u) = 3u^2(1 - u), N_{3,4}(u) = u^3$

# Niejednorodne wielokrotne węzły

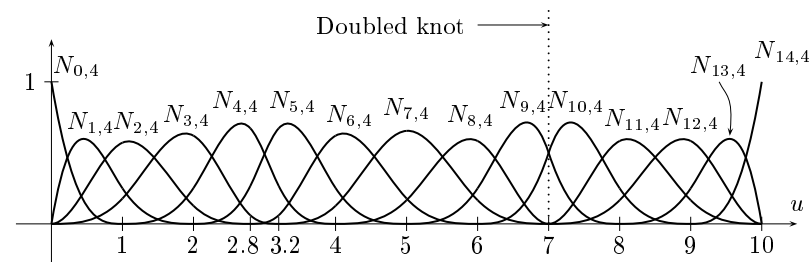
■ węzły:  $0, 0, 0, 0, 1, 2, 2\frac{4}{5}, 3\frac{1}{5}, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10$



(a) Degree one blending functions.



(b) Degree two blending functions.



(c) Degree three blending functions.

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

Twierdzenie 2. Niech  $q(u)$  będzie krzywą B-sklejaną stopnia  $m - 1$  i węzeł  $u_i$  ma krotność  $\mu$ . Wtedy  $q(u)$  ma ciągłe pochodne do stopnia  $m - \mu - 1$  w punkcie  $u_i$ .

# Wymierne B-sklejane krzywe (NURBS)

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

$$p_i = (x : y : z : w),$$

$$q(u) = \sum_i N_{i,m}(u)p_i$$

- współrzędna  $w$  pozwala na powiększenie wagi punktu kontrolnego
- modelowanie krzywych stożkowych
- rzut perspektywiczny krzywej wymiernej jest zawsze krzywą wymierną
- punkty kontrolne mogą być umieszczone w nieskończoności



Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

- Dane są punkty  $P_0, \dots, P_m$  i węzły  $u_i = i$  dla  $i = 0, \dots, m$ .
- Określić parametryzowaną krzywą  $q(u)$  tak, żeby  $q(i) = P_i$  dla  $i = 1, \dots, m - 1$ .
- Krzywa Catmulla-Roma składa się z  $m - 2$  krzywych Béziera.
- Punkty kontrolne wybiera się tak, żeby krzywa była klasy  $C^1$ .

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

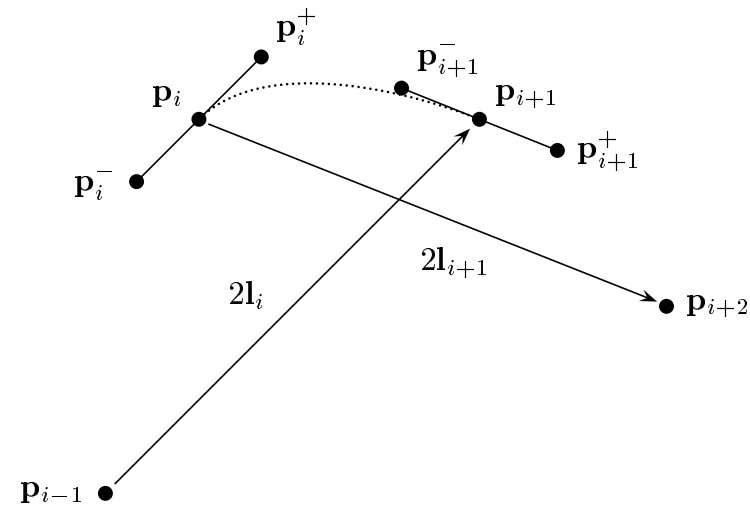


Figure VII.22: Defining the Catmull-Rom spline segment from the point  $\mathbf{p}_i$  to the point  $\mathbf{p}_{i+1}$ . The points  $\mathbf{p}_i^-$ ,  $\mathbf{p}_i$ , and  $\mathbf{p}_i^+$  are collinear and parallel to  $\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_{i-1}$ . The points  $\mathbf{p}_i$ ,  $\mathbf{p}_i^+$ ,  $\mathbf{p}_{i+1}^-$ , and  $\mathbf{p}_{i+1}$  form the control points of a degree three Bézier curve, which is shown as a dotted curve.

$$l_i = \frac{1}{2}(p_{i+1} - p_{i-1}), \quad p_i^\pm = p_i \pm \frac{1}{3}l_i$$

# Splajn Catmull-Rom

Trzy układy  
współrzędnych  
Geometria  
afiniczna  
Rzutowanie  
Położenia kątowe  
Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$   
Krzywe  
B-sklejane  
Splajny

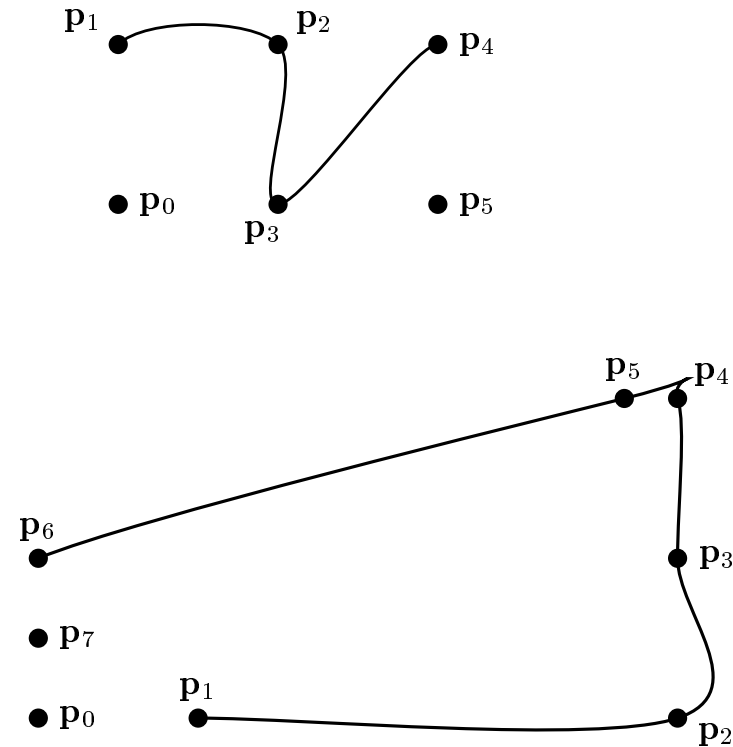


Figure VII.23: Two examples of Catmull-Rom splines with uniformly spaced knots.

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

- Parameter  $u \approx$  długości cięciwy.
- $u_{i+1} - u_i = \|p_{i+1} - p_i\|.$

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

- $v_{i+\frac{1}{2}} = \frac{p_{i+1}-p_i}{u_{i+1}-u_i}, i = 0, \dots, m-1.$
- $v_i = \frac{(u_{i+1}-u_i)v_{i-\frac{1}{2}} + (u_i-u_{i-1})v_{i+\frac{1}{2}}}{u_{i+1}-u_{i-1}}, i = 1, \dots, m-1.$
- $p_i^- = p_i - \frac{1}{3}(u_i - u_{i-1})v_i, i = 1, \dots, m-1.$
- $p_i^+ = p_i + \frac{1}{3}(u_{i+1} - u_i)v_i, i = 1, \dots, m-1.$
- Krzywa Béziera o punktach kontrolnych  $p_i, p_i^+, p_{i+1}^-, p_{i+1},$   
 $i = 1, \dots, m-1.$

# Splajn Bessela-Overhausera

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

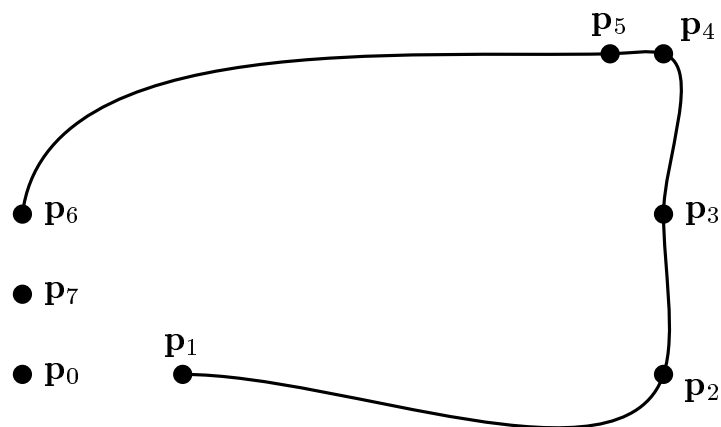
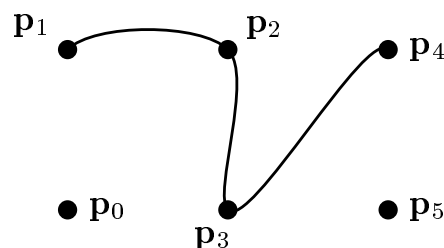


Figure VII.24: Two examples of Overhauser spline curves. The knot positions were set by chord-length parameterization. These are defined from exactly the same control points as the Catmull-Rom curves in figure VII.23.

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

- $p_0 = p_1 = (0, 0), p_2 = (10, 0), p_3 = p_4 = (10, 1),$
- $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 2,1, u_4 = 3,1.$

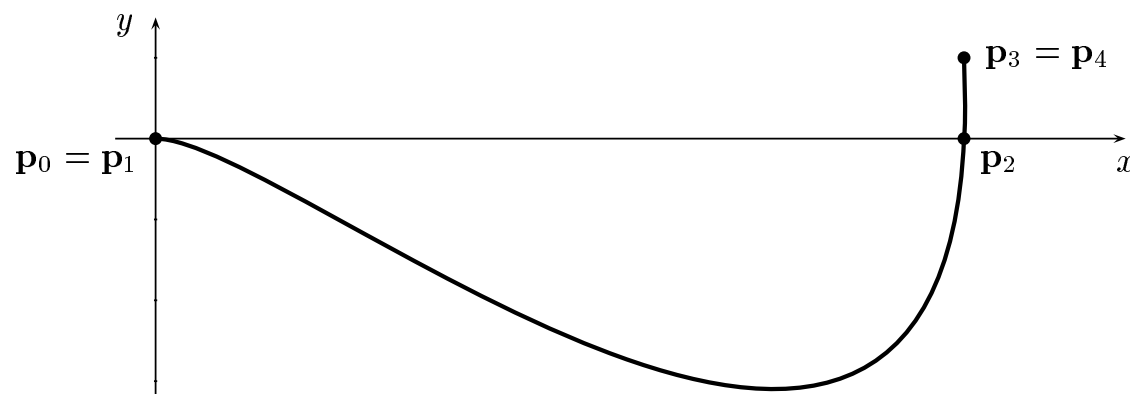


Figure VII.25: The Overhauser spline which is the solution to exercise VII.24.

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

Twierdzenie 3. Splajn Bessela-Overhausera jest krzywą klasy  $C^1$ .

Twierdzenie 4. Niech dane będą punkty  $p_0, \dots, p_m$  i węzły  $u_0, \dots, u_m$ . Niech  $f_i(u)$  będzie wielomianem kwadratowym, takimi że  $f_i(u_{i-1}) = p_{i-1}$ ,  $f_i(u_i) = p_i$ ,  $f_i(u_{i+1}) = p_{i+1}$  dla  $i = 1, \dots, m-1$ .

Wtedy

$$q_i(u) = \frac{(u_{i+1} - u)f_i(u) + (u - u_i)f_{i+1}(u)}{u_{i+1} - u_i}$$

zgadza się ze splajnem Bessela-Overhausera na odcinku  $[u_i, u_{i+1}]$ .



Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

- Tension-Bias-Continuity, (Napięcie-Skos-Gładkość).
- Wpływ na punkty kontrolne  $p_i^{\pm}$ .
- Pochodne w końcach przedziału:
 
$$Dq_i^- = \lim_{u \rightarrow u_i^-} \frac{q(u_i) - q(u)}{u_i - u} = 3(p_i - p_i^-),$$

$$Dq_i^+ = \lim_{u \rightarrow u_i^+} \frac{q(u) - q(u_i)}{u - u_i} = 3(p_i^+ - p_i).$$
- $p_i^+ = p_i + \frac{1}{3}Dq_i^+, p_i^- = p_i - \frac{1}{3}Dq_i^-.$
- Catmull-Rom:  $Dq_i^- = Dq_i^+ = \frac{1}{2}v_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}v_{i+\frac{1}{2}},$  gdzie  $v_{i-\frac{1}{2}} = p_i - p_{i-1}.$

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

- $t < 1$ , (Catmull-Rom  $t = 0$ ).
- $Dq_i^- = Dq_i^+ = (1 - t) \left( \frac{1}{2}v_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}v_{i+\frac{1}{2}} \right)$ , gdzie  
 $v_{i-\frac{1}{2}} = p_i - p_{i-1}$ .

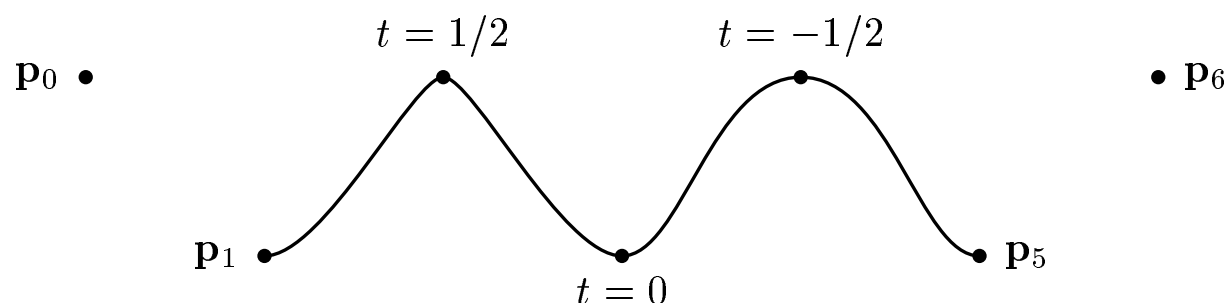


Figure VII.26: The effects of the tension parameter.

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

- Dla krzywej klasy  $C^1$  parametr  $c = 0$ .
- Dla  $-1 \leq c < 0$  pochodnia w  $u_i$  nie jest ciągła.
- $Dq_i^- = \frac{1-c}{2}v_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1+c}{2}v_{i+\frac{1}{2}}$ ,  $Dq_i^+ = \frac{1+c}{2}v_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1-c}{2}v_{i+\frac{1}{2}}$ ,  
gdzie  $v_{i-\frac{1}{2}} = p_i - p_{i-1}$ .

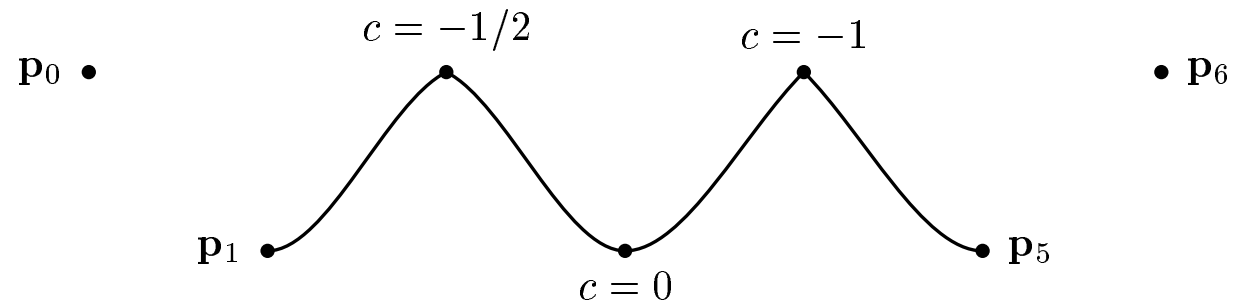


Figure VII.27: The effects of the continuity parameter.

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

- $Dq_i^- = Dq_i^+ = \frac{1+b}{2}v_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1-b}{2}v_{i+\frac{1}{2}},$
- gdzie  $v_{i-\frac{1}{2}} = p_i - p_{i-1}.$

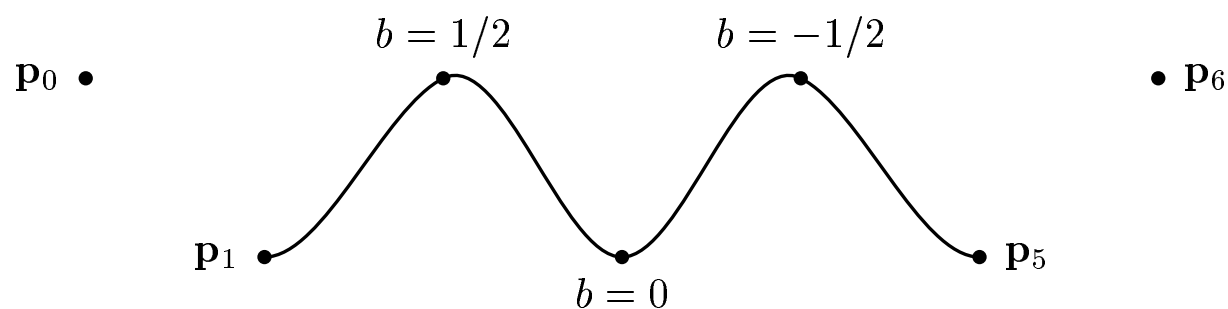


Figure VII.28: The effects of the bias parameter.

Trzy układy  
współrzędnych

Geometria  
afiniczna

Rzutowanie

Położenia kątowe

Ciało  
kwaternionów  $\mathbb{Q}$

Krzywe  
B-sklejane

Splajny

- $Dq_i^- = \frac{(1-t)(1-c)(1+b)}{2} v_{i-\frac{1}{2}} + \frac{(1-t)(1+c)(1-b)}{2} v_{i+\frac{1}{2}},$
- $Dq_i^+ = \frac{(1-t)(1+c)(1+b)}{2} v_{i-\frac{1}{2}} + \frac{(1-t)(1-c)(1-b)}{2} v_{i+\frac{1}{2}},$
- gdzie  $v_{i-\frac{1}{2}} = p_i - p_{i-1}.$