

Zadanie 2: Zbadaj istnienie granicy funkcji

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

Rozwiązanie:

aby sprawdzić istnienie granicy, wystarczy sprawdzić, czy istnieje granica lewostronna i prawostronna i czy są one sobie równe:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{2}{1+e^{+\infty}} = \frac{2}{1+\infty} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$P = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+2}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{2}{1+e^{-\infty}} = \frac{2}{1+0} = \frac{2}{1} = 2$$

Czyli

$$L \neq P,$$

więc nie istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$$

Zadanie 4: Korzystając z własności Darboux oraz monotoniczności funkcji, wykaż że równanie

$$x * 2^x = 1$$

ma dokładnie jeden pierwiastek dodatni.

Rozwiązanie:

niech

$$f(x) = x * 2^x - 1.$$

Funkcje $g(x) = x$ oraz $h(x) = 2^x$ są ciągłe. Ponieważ iloczyn i różnica funkcji ciągłych jest ciągły, to $f(x)$ też jest ciągła.

Funkcje $g(x) = x$ oraz $h(x) = 2^x$ są rosnące. Ponieważ iloczyn funkcji rosnących jest rosnący, to $f(x)$ też rośnie (zauważmy, że odjęcie stałej nic nie zmienia dla monotoniczności funkcji). Zauważmy jeszcze, że

$$f(0) = 0 * 2^0 - 1 = -1$$

oraz

$$f(1) = 1 * 2^1 - 1 = 1.$$

Zatem, na mocy własności Darboux, istnieje taka liczba x z przedziału $(0,1)$, dla której $f(x)=0$, a ponieważ funkcja f jest ściśle monotoniczna, to liczba x jest wyznaczona jednoznacznie.

Zadanie 6: Zbadaj zbieżność warunkową i bezwzględną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{n^2+1}.$$

Powołaj się na odpowiednie kryteria.

Rozwiązanie:

na początku zauważmy, że jest to szereg przemienny i oznaczmy

$$a_n = \frac{n+2}{n^2+1}.$$

Chcemy skorzystać z kryterium Leibniza. W tym celu liczymy granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{n+\frac{1}{n}} = \frac{1+0}{\infty+0} = 0.$$

I sprawdzamy, czy ciąg a_n jest ciągiem nierosnącym, tzn. czy zachodzi nierówność

$$\frac{n+2}{n^2+1} \geq \frac{n+3}{(n+1)^2+1}.$$

Mnożymy obie strony przez iloczyn mianowników

$$(n+2) * (n^2+2n+2) \geq (n+3) * (n^2+1).$$

Wymnażamy obie strony

$$n^3 + 4n^2 + 6n + 4 \geq n^3 + 3n^2 + n + 3.$$

Przenosimy na jedną stronę nierówności i otrzymujemy

$$n^2 + 5n + 1 \geq 0.$$

Zauważmy, że

$$n^2 + 2n + 1 + 3n = (n+1)^2 + 3n \geq 0.$$

Ponieważ wszystkie powyższe nierówności są równoważne, otrzymujemy wniosek, iż ciąg a_n jest nierosnący.

Więc na mocy kryterium Leibniza, szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{n^2+1}$$

jest zbieżny.

Zbadajmy teraz zbieżność bezwzględną. Badamy zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+1}.$$

Zauważmy, że

$$\frac{n+2}{n^2+1} \geq \frac{n+1}{n^2+2n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2} \geq \frac{1}{n+1},$$

a szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

jest rozbieżny (wiemy to z wykładu).

Zatem na mocy kryterium porównawczego szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+1}$$

jest rozbieżny.

Czyli szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{n^2+1}$$

jest zbieżny warunkowy (bo jest zbieżny, ale nie jest zbieżny bezwzględnie).