

- **Ciągłość funkcji**

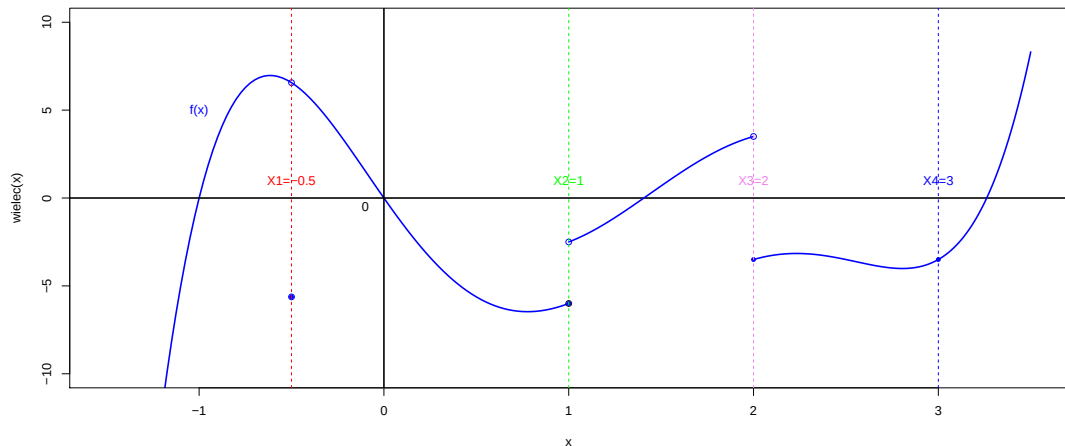
Będziemy rozpatrywać funkcję $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$. Intuicyjnie można powiedzieć, że funkcja jest ciągła, jeśli można ją narysować nie odrywając długopisu (ołówka, kredki itp.) od kartki.

Funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 \in D_f$ jeśli

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0),$$

czyli granice prawostronne i lewostronne liczone w punkcie x_0 muszą być sobie równe, oraz muszą być równe wartości funkcji w tym punkcie.

- Rozpatrzmy kilka przypadków



– Badając ciągłość w punkcie $x_1 = -0.5$ otrzymamy:

$$\lim_{x \rightarrow x_1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_1^+} f(x) \neq f(x_1).$$

Tutaj otrzymaliśmy, że granice prawostronne i lewostronne są sobie równe, ale nie są równe wartości funkcji w tym punkcie, stąd f nie jest ciągła w $x_1 = -0.5$.

– Badając ciągłość w punkcie $x_2 = 1$ otrzymamy:

$$f(x_2) = \lim_{x \rightarrow x_2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_2^+} f(x),$$

granice prawostronne i lewostronne są różne, więc f nie jest ciągła w $x_2 = 1$

– Badając ciągłość w punkcie $x_3 = 2$ otrzymamy:

$$\lim_{x \rightarrow x_3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_3^+} f(x) = f(x_3).$$

granice prawostronne i lewostronne są różne, więc f nie jest ciągła w $x_2 = 1$

– Badając ciągłość w punkcie $x_4 = 3$ otrzymamy:

$$\lim_{x \rightarrow x_4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_4^+} f(x) = f(x_4).$$

granice prawostronne i lewostronne są równe oraz są równe wartości $f(x_4)$, więc f jest ciągła w $x_2 = 1$.

Przykład 0.0.1.

Zbadamy ciągłość funkcji $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{gdy } x \neq 0 \\ 0 & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$.

Dziedzina funkcji: $D_f = \mathbb{R}$

Liczmy granice:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = (\star)$$

// zauważmy że $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$ gdy $x \rightarrow 0$, a także $\sin \frac{1}{x}$ jest ograniczony, zatem...//

$$(\star) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

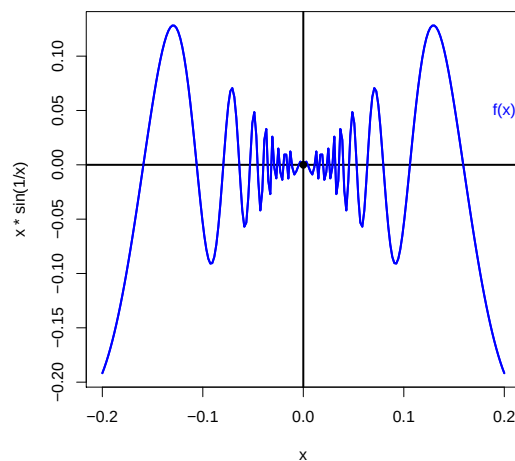
analogicznie dostaniemy

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Mamy także $f(0) = 0$, stąd

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$. Wykres:



• **Zad.1**

Zbadać ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{gdy } x < 0 \\ 0 & \text{gdy } x = 0 \\ -x+1 & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$$

Przykład 0.0.2.

Należy dobrać parametry a i b tak aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1} & \text{gdy } x > 2 \\ ax+b & \text{gdy } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{x^2-3x}{x^2-x} & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$$

była ciągła na $\mathbb{R}$. Należy sprawdzić granice:

$$1^\circ \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$2^\circ \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

Przypadek 1°

granica prawostronna:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+1} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-1)-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-1}+1 = 2\end{aligned}$$

teraz granica lewostronna:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} ax + b = 2a + b$$

Stąd otrzymujemy pierwsze równanie, które będziemy rozpatrywać

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$2a + b = 2$$

Przypadek 2°

granica prawostronna:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ax + b = b$$

granica lewostronna:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-3)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x-3)}{(x-1)} = \frac{-3}{-1} = 3$$

Stąd otrzymujemy drugie równanie

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

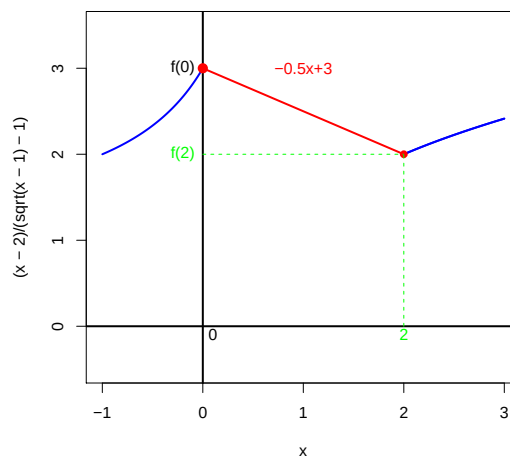
$$3 = b$$

Należy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} 2a + b = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$
$$2a + 3 = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Otrzymaliśmy, że $a = -\frac{1}{2}$ oraz $b = 3$. Wzór naszej funkcji wygląda następująco:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1} & \text{gdy } x > 2 \\ -\frac{1}{2}x + 3 & \text{gdy } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{x^2-3x}{x^2-x} & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$$



• **Zadania do samodzielnego rozwiązania.**

Dobrać parametry a, b tak aby poniższe funkcje były ciągłe:

$$\text{a)} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{9-3x}{1-\sqrt{4-x}} & \text{gdy } x < 3 \\ -m^2 & \text{gdy } x = 3 \\ \frac{9-x^2}{x^2-5x+6} & \text{gdy } x > 3 \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} & \text{gdy } x > 2 \\ a & \text{gdy } x = 2 \\ x \arctg\left(\frac{1}{2-x}\right) + b & \text{gdy } x < 2 \end{cases}$$

$$\text{c)} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \sin a & \text{gdy } x = -2 \\ \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4} & \text{gdy } x \in \mathbb{R} / \{-2, 2\} \\ \frac{1}{2} \ln^2 b - \frac{1}{3} \ln b & \text{gdy } x = 2 \end{cases}$$

$$\text{d)} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+2}{\sqrt{x+5}-4} & \text{gdy } x < -1 \\ ax + b & \text{gdy } -1 \leq x \leq 3 \\ \frac{x^2-9}{x^2-2x+3} & \text{gdy } x > 3 \end{cases}$$